

IB 131-2015/031

**Untersuchungen zur Strukturauslegung
im Flugzeugentwurf**

Marius Hein, Tanja Führer, Christian Willberg



**Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik
Braunschweig**

Mai / 2015

**Deutsches Zentrum
für Luft- und Raumfahrt e.V.**
in der Helmholtzgemeinschaft
Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptronik

IB 131-2015/031

**Untersuchungen zur Strukturauslegung
im Flugzeugentwurf**

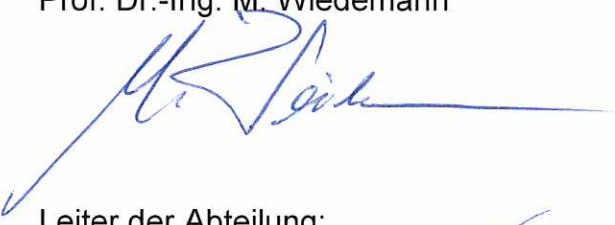

Braunschweig, Mai, 2015

Der Bericht umfasst:

109 Seiten

Institutsleiter:
Prof. Dr.-Ing. M. Wiedemann

Verfasser:
Marius Hein


Leiter der Abteilung:
Name des Abteilungsleiters
Dr.- Ing. Tobias Wille 

Dr.- Ing. Tanja Führer


Dr.- Ing. Christian Willberg




Masterarbeit

Untersuchungen zur Strukturauslegung im Flugzeugentwurf

vorgelegt von

Marius Hein

Matrikelnummer 12 55 911

Maschinenbau Entwicklung

Hochschule Hannover, Fakultät 2

Beginn der Bearbeitungsphase: 1. Oktober 2014

Abgabe: 17. Februar 2015

Angaben des Prüflings

Titel	Untersuchungen zur Strukturauslegung im Flugzeugentwurf
Bearbeiter	Marius Hein
Matrikelnummer	1255911
Fachrichtung	Maschinenbau Entwicklung
Studienschwerpunkt	Fahrzeugtechnik
Fakultät	Maschinenbau (Fakultät 2)
Hochschule	Hochschule Hannover
Erstprüfer	Prof. Dr.-Ing. Wilhelm Rust
Zweitprüfer	Prof. Dr. Claus Hentschel
Betreuer innerhalb der Firma	Dr.-Ing. Tanja Führer
2. Betreuer innerhalb der Firma	Dr.-Ing. Christian Willberg
Durchgeführt bei der Firma	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
Abteilung	Institut für Faserverbundleichtbau und Adaptro- nik – Strukturmechanik
Sperrvermerk	Nein
Anmeldedatum	1. Oktober 2014
Datum der Einreichung	17. Februar 2015

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die eingereichte Masterarbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst, andere als die von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Werken wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Ich versichere ferner, dass diese Masterarbeit bislang keinem anderen Prüfungsamt einer Universität oder Hochschule der Bundesrepublik Deutschland zur Bewertung vorgelegen hat.

Hannover, 17. Februar 2015

Marius Hein

Matrikelnummer: 12 55 911

Inhaltsverzeichnis

Angaben des Prüflings	ii
Eidesstattliche Erklärung	iii
Abkürzungsverzeichnis	vii
Symbolverzeichnis	ix
1. Einleitung	1
1.1. Ziel der Arbeit	1
1.2. Aufbau der Arbeit	2
2. Theoretische Grundlagen	3
2.1. Finite Elemente Methode	3
2.1.1. Elemente	4
2.1.2. Ansatzfunktionen	4
2.1.3. Elastostatik	7
2.1.4. Gaußpunkt-Integration	8
2.2. Strukturoptimierung	9
2.2.1. Gradientenbasierte Verfahren	11
2.2.1.1. Methode des steilsten Abstiegs	12
2.2.1.2. Modifizierte Methode der zulässigen Richtungen	14
2.2.1.3. Innere-Punkte-Verfahren	15
2.3. Faserverbundwerkstoffe	16
2.3.1. Kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff	16
2.3.2. Notation der Schichtfolge eines Laminates	16
2.3.3. Versagenskriterien	17
2.3.4. Klassische Laminat-Theorie	18
2.3.5. Abweichungen von der Klassischen Laminat-Theorie	24
2.4. HyperSizer	27

3. NASTRAN	28
3.1. Elemente	28
3.2. NASTRAN Solution 101 (SOL101)	29
3.3. NASTRAN Solution 200 (SOL200)	29
4. Voruntersuchungen	33
4.1. Optimierung am Balken	33
4.1.1. Optimierung unter Zugbelastung F_x	34
4.1.2. Optimierung unter Torsionsbelastung M_x	35
4.1.3. Optimierung unter Biegebelastung F_z	39
4.1.4. Optimierung unter kombinierter Zug- und Torsionsbelastung F_x und M_x	41
4.1.5. Variation der Startparameter zur Optimierung unter kombinierter Zug- und Torsionsbelastung F_x und M_x	44
4.2. Vergleich von IPOPT und MSCADS Optimierer	47
5. Automatisierte Erweiterung auf komplexe Modelle	49
6. Strukturauslegung am Beispiel Flügelkasten	51
6.1. Aufbau des Modells	51
6.2. Optimierung	53
6.3. Variation der Start-Parameter	56
7. Vergleich der Ergebnisse mit HyperSizer	60
7.1. Vergleich am Balken	60
7.2. Vergleich am Kastenprofil	63
8. Ausblick	67
A. Verwendete Software	69
B. Verwendete Materialparameter	70
C. Beispielrechnung CLT ABD-Matrix	71
D. Beispielrechnung CLT ABD-Matrix verschmiert	77
E. Inputdatei NASTRAN SOL101	81

F. Inputdatei NASTRAN SOL200	82
G. Elektronischer Anhang	92
Abbildungsverzeichnis	I
Tabellenverzeichnis	IV
Literaturverzeichnis	V

Abkürzungsverzeichnis

Abkürzung	Erläuterung
1D	Eindimensional
2D	Zweidimensional
3D	Dreidimensional
akaflieg	Akademische Fliegergruppe
ASCII	Zeichenkodierung (American Standard Code for Information Exchange)
CFK	Kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff (carbonfaserverstärkter Kunststoff)
CG	Konjugierte Gradientenverfahren (conjugate gradients)
CLT	Klassische Laminattheorie (Classical Laminate Theory)
FEM	Finite Elemente Methode
FVK	Faserverbundkunststoff
FVW	Faserverbundwerkstoff
GFK	Glasfaserverstärkter Kunststoff
IPOPT	Innere Punkte Optimierung (Interior point optimization)
KOS	Koordinatensystem
MMFD	Modifizierte Methode der zulässigen Richtungen (Modified Method of Feasible Directions)
MOS (MS)	Sicherheitsfaktor (Margin of Safety)
MSC	MacNeal-Schwendler Corporation

Abkürzung	Erläuterung
MSCADS	MSC-Automated Design Synthesis (Vanderplaats)
MSV	Mehrschichtverbund
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NASTRAN	NASA Structural Analysis
SLP	Sequentielle Lineare Programmierung
SQP	Sequentielle Quadratische Programmierung
SUMT	Sequentiell unbeschränkte Minimierungs-Methode (Sequential unconstrained minimization technique)
UD	unidirektional
VW	Verbundwerkstoff

Symbolverzeichnis

Symbol	Erläuterung	Einheit
$\vec{\sigma}$	Spannungsvektor	$\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right]$
$\vec{\epsilon}$	Verzerrungsvektor	$[-]$
τ	Schubspannung	$\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right]$
γ	Schubdehnung	$[-]$
ν	Querkontraktionszahl	$[-]$
E	Elastizitätsmodul	$\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right]$
G	Schubmodul	$\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right]$
\underline{E}	Elastizitätsmatrix	$\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right]$
u	Verschiebung	$[\text{mm}]$
\hat{u}	Knotenverschiebung	$[\text{mm}]$
\underline{K}	Elementsteifigkeitsmatrix	$\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}}\right]$
\underline{D}	(FEM) Differentialoperatormatrix	$\left[\frac{1}{\text{mm}}\right]$
\underline{B}	Verzerrungs-Verschiebungsmatrix	$\left[\frac{1}{\text{mm}}\right]$
S_1^T	zulässige Zug-Spannung eines Materials in Faserrichtung	$\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right]$
S_2^C	zulässige Druck-Spannung eines Materials quer zur Faserrichtung	$\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right]$
ρ	Dichte	$\left[\frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}\right]$
S	Sicherheitsfaktor (MOS)	$[-]$
\underline{T}	Transformationsmatrix	$[-]$
\underline{C}	Steifigkeitsmatrix	$\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\right]$

Symbol	Erläuterung	Einheit
$\vec{\kappa}$	Krümmungsvektor	$[\frac{1}{\text{mm}}]$
\underline{A}	Scheibenquadrant \underline{ABD} -Matrix	$[\frac{\text{N}}{\text{mm}}]$
\underline{B}	Koppelquadrant \underline{ABD} -Matrix	$[\text{N}]$
\underline{D}	Plattenquadrant \underline{ABD} -Matrix	$[\text{Nmm}]$
\underline{A}_n	Dickennormierter Scheibenquadrant \underline{ABD} -Matrix	$[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}]$
\underline{B}_n	Dickennormierter Koppelquadrant \underline{ABD} -Matrix	$[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}]$
\underline{D}_n	(CLT) Dickennormierter Plattenquadrant \underline{ABD} -Matrix	$[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}]$
W_y	Widerstandsmoment in der Y-Achse	$[\text{mm}^3]$
W_T	Torsionswiderstandsmoment	$[\text{mm}^3]$
α	Anteil an 0° -Lagen im Laminat	$[-]$
β	Anteil an 90° -Lagen im Laminat	$[-]$
γ	Anteil an $\pm 45^\circ$ -Lagen im Laminat	$[-]$

1. Einleitung

Umweltfreundlichkeit ist ein Thema, welches aktuell und auch in naher Zukunft eine immer stärkere Rolle einnimmt. In der Luftfahrt bestimmt das Gewicht des Flugzeuges wesentlich den Treibstoffverbrauch und die damit verbundene Umweltbelastung. Durch einen geeigneten Flugzeuggesamtentwurf kann das Gewicht gesenkt werden. Die Betriebskosten werden ebenfalls wesentlich von dem Gewicht beeinflusst, da die Kraftstoffkosten einen großen Anteil ebendieser einnehmen. Eine aktuell angewandte Möglichkeit zur Gewichtsreduktion stellt die Wahl alternativer Werkstoffe dar. Große Teile moderner Flugzeuge bestehen aus Aluminium-Legierungen. Segelflugzeuge waren Vorreiter bei der Verwendung von Faserverbundwerkstoffen im Flugzeugbau. Bereits 1960 wurde von der akademischen Fliegergruppe (akaflieg) Braunschweig das Segelflugzeug SB 6 aus glasfaserverstärktem Kunststoff (GFK) gebaut. Etwa 10 Jahre später (1972) folgte dann die SB 10 mit einem mittleren Flügelteil aus kohlenstofffaserverstärktem Kunststoff (CFK) [23]. In den 70er Jahren kam es auch bei Verkehrsflugzeugen zum Einsatz von CFK, allerdings machte der Werkstoff mit 4% beispielsweise im Airbus A300 einen geringen Anteil aus. Der Anteil stieg in den letzten 40 Jahren sukzessive an, da erst einmal Sicherheit und Erfahrung im Umgang mit CFK gesammelt werden musste. Seit Januar 2015 ist der Airbus A350 mit 53% CFK in der Luft. CFK hat gegenüber Aluminium-Legierungen eine geringere Dichte, höhere Korrosionsbeständigkeit und eine größere Ermüdungsfestigkeit [23]. Der Fertigungsaufwand ist jedoch bei CFK höher.

1.1. Ziel der Arbeit

In dieser Masterarbeit werden Optimierungsverfahren zur Auslegung von Faserverbundwerkstrukturen mittels gradientenbasierten Verfahren untersucht. Dies geschieht mit NASTRAN Solution 200 und wird im Hinblick auf Machbarkeit, Robustheit und Effizienz untersucht. Der Fokus liegt dabei auf der Entwicklung eines Verfahrens, welches eine Entwurfsoptimierung an CFK-Strukturen vornimmt. Dieses Verfahren soll später im Rahmen des Flugzeuggesamtentwurfes verwendet werden.

1.2. Aufbau der Arbeit

Um dem Leser einen Einstieg in diese Themen zu ermöglichen, beginnt die Arbeit mit einem theoretischen Teil über die Finite Elemente Methode und der Strukturoptimierung. Danach folgt in Kapitel 3 ein kurzer Einblick in die Grundlagen von Nastran als Überleitung in die eigentliche Arbeit. Um die Komplexität des Themas stetig zu steigern, werden in Kapitel 4 einige Voruntersuchungen an einem einfachen Balkenprofil durchgeführt. Die Optimierung wird ebenfalls an dem einfachen Beispiel entwickelt und dort validiert. In der nächsten Abstraktionsstufe wird die Optimierung an einem komplexeren Modell getestet. Beide Modelle werden ebenfalls mit einem anderen kommerziellen Tool optimiert und die Ergebnisse verglichen. Zum Ende der Arbeit werden die gesammelten Erkenntnisse festgehalten und ein Ausblick für weiterführende Arbeiten gegeben.

2. Theoretische Grundlagen

Zu Beginn der Arbeit werden einige theoretische Grundlagen erläutert. Dies soll den Einstieg in diese Arbeit erleichtern und zu einem besseren Verständnis in den folgenden Kapiteln führen. Die Erläuterungen werden dabei nicht vertieft sondern sollen lediglich ein Grundverständnis liefern. Für tiefgreifende Erläuterungen wird auf die Literatur verwiesen. Die Arbeit beginnt mit einer Einführung in die Finite Elemente Methode, da es sich bei der verwendeten Software Nastran um eine FEM-Software handelt. In Abschnitt 2.2 werden die Grundlagen einer Optimierung und einige Optimierungsmethoden vorgestellt. Da die Optimierung an einem Faserverbundwerkstoff stattfindet, werden diese in Abschnitt 2.3 beschrieben. Die Ergebnisse der Arbeit werden in Kapitel 7 mit einem kommerziellen Programm, HyperSizer, verglichen. Deswegen werden die Grundzüge des Programms in Abschnitt 2.4 kurz vorgestellt.

2.1. Finite Elemente Methode

Bei der Finite Elemente Methode (FEM) handelt es sich um eine numerische Berechnungsmethode aus der Strukturmechanik zum Lösen von Differentialgleichungen. Die FEM ist eine in der Festkörpermechanik weit verbreitete Methode. Sie ist im Wesentlichen in den letzten 60 Jahren entwickelt worden und hat heutzutage aufgrund schnell voranschreitender Leistungssteigerung bei Computern einen hohen Stellenwert eingenommen. In der FEM werden partielle Differentialgleichungen numerisch gelöst. Somit kann lediglich eine Näherungslösung berechnet werden. Diese kann jedoch sehr nah bei der analytischen Lösung des Problems liegen. In der Praxis auftretende Problemstellungen sind komplex und es gibt oft keine analytische Lösung für das Problem bzw. analytische Lösungen sind sehr eingeschränkt und auf spezielle Probleme angepasst. [10]

2.1.1. Elemente

Ein finites Element ist je nach Anwendungsfall ein-, zwei- oder dreidimensional aufgebaut. Dreidimensionale Elemente werden auch als Volumenelemente bezeichnet. In der Arbeit kommen zweidimensionale Schalenelemente zum Einsatz. Jedes Element ist relativ simpel strukturiert und besteht aus einzelnen Knoten. Jeder Knoten besitzt sechs Freiheitsgrade. Dabei handelt es sich um die Verschiebungen entlang der x - bzw. y -Achse u_x , u_y und die Verschiebung u_{xy} quer dazu. Hinzu kommen die Verdrehungen um jede der drei Achsen. Schalenelemente sind gut geeignet für die Berechnung von dünnwandigen Bauteilen. Die Gesamtgeometrie wird in kleinere Elemente unterteilt. Dies geschieht durch ein Netz, welches um die Geometrie aufgespannt wird. Je feiner die Vernetzung, desto eher konvergiert das Ergebnis gegen die analytische Lösung [10]. Ein feineres Netz bedeutet aber auch eine höhere Elementanzahl und somit eine längere Berechnungszeit, da durch eine erhöhte Knotenanzahl mehr Gleichungen gelöst werden müssen. Ein Kompromiss ist häufig eine lokale Verfeinerung, dabei wird das Netz an Stellen, an denen z.B. Spannungsspitzen erwartet werden, mit mehr Elementen beschrieben. Dadurch steigt die Genauigkeit an dieser Stelle und die Rechenzeit erhöht sich nur gering [10].

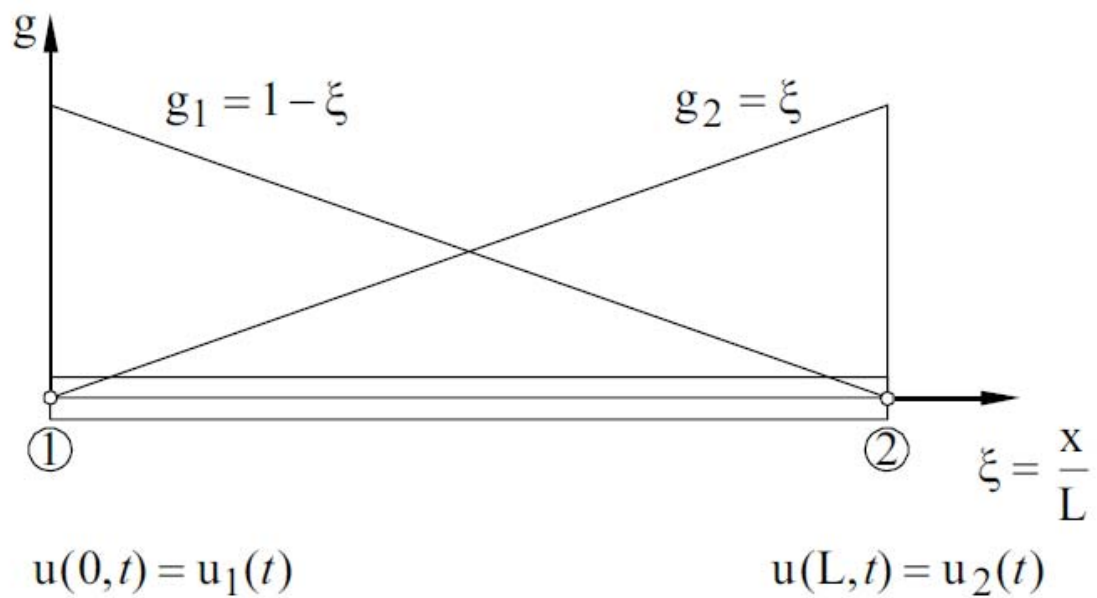
2.1.2. Ansatzfunktionen

Ansatzfunktionen dienen der mathematischen Beschreibung des Verhaltens zwischen den Knoten eines finiten Elements. Finite Elemente werden üblicherweise in Einheitskoordinaten beschrieben. Exemplarisch werden die linearen Ansatzfunktionen für ein finites Stabelement und ein Vier-Knoten-Element entwickelt. Diese sind so geschaffen, dass die Summe der Ansatzfunktionen im Element immer Eins ist. Üblicherweise existiert in jedem Knoten eine Ansatzfunktion mit dem Wert Eins während der Rest den Wert Null annimmt (siehe Gleichung 2.1 [10]). In Abbildung 2.1 [10] sind die Ansatzfunktionen im Einheitskoordinatensystem ξ für ein Stabelement dargestellt.

$$\underline{N}(x) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Da es sich bei einem Stab um ein 1D-Element handelt, wird lediglich ξ als Koordinate benötigt.

Bei einem Vier-Knoten-Element werden die Terme der Ansatzfunktion (2.2) über das Schema auf Abbildung 2.2 gebildet.

Abbildung 2.1.: Ansatzfunktionen eines Balkenelements der Länge L [10]

	1	ξ	ξ^2
1	1	ξ	ξ^2
η	η	$\xi\eta$	$\xi^2\eta$
η^2	η^2	$\xi\eta^2$	$\xi^2\eta^2$

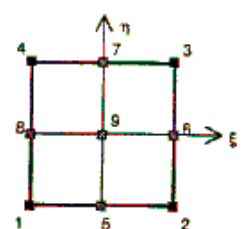
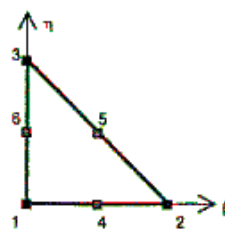


Abbildung 2.2.: Entwicklung der Ansatzfunktionen bei Dreieck- und Viereckelementen [20]

$$u(\xi, \eta) = a + b\xi + c\eta + d\xi\eta \quad (2.2)$$

Nun muss der Ansatz in den vier Eckpunkten aufgestellt werden (2.3).

$$\begin{aligned} u_1(-1, -1) &= a - b - c + d = \hat{u}_1 \\ u_2(+1, -1) &= a + b - c - d = \hat{u}_2 \\ u_3(+1, +1) &= a + b + c + d = \hat{u}_3 \\ u_4(-1, +1) &= a - b + c - d = \hat{u}_4 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Durch das Auflösen der Gleichungen 2.3 nach den Parametern a bis d ergeben sich die Gleichungen nach 2.4.

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4}(\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3 + \hat{u}_4) \\ b &= \frac{1}{4}(-\hat{u}_1 + \hat{u}_2 + \hat{u}_3 - \hat{u}_4) \\ c &= \frac{1}{4}(-\hat{u}_1 - \hat{u}_2 + \hat{u}_3 + \hat{u}_4) \\ d &= \frac{1}{4}(\hat{u}_1 - \hat{u}_2 + \hat{u}_3 - \hat{u}_4) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Durch Einsetzen der Parameter aus 2.4 in Gleichung 2.2 und Umstellen nach \hat{u}_i ergibt sich Gleichung 2.5.

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{4}\hat{u}_1(1 - \xi - \eta + \xi\eta) + \frac{1}{4}\hat{u}_2(1 + \xi - \eta - \xi\eta) + \frac{1}{4}\hat{u}_3(1 + \xi + \eta + \xi\eta) + \frac{1}{4}\hat{u}_4(1 - \xi + \eta - \xi\eta) \quad (2.5)$$

Die Ansatzfunktionen 2.6 bis 2.9 [20] lassen sich nun direkt aus Gleichung 2.5 ablesen.

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi - \eta + \xi\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (2.6)$$

$$N_2(\xi, \eta) = \dots = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (2.7)$$

$$N_3(\xi, \eta) = \dots = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (2.8)$$

$$N_4(\xi, \eta) = \dots = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (2.9)$$

Nach dem gleichen Prinzip können die Ansatzfunktionen für andere Elementtypen gebildet werden.

2.1.3. Elastostatik

In der Elastostatik (Festigkeitslehre) werden Körper unter der Einwirkung von Kräften hinsichtlich Versagens untersucht. Betrachtet man ein Scheibenelement unter der Annahme des ebenen Spannungszustandes (siehe Gleichung 2.10), so ergeben sich acht Unbekannte zur Beschreibung des elastomechanischen Verhaltens.

- 2 Verschiebungen $\vec{u} = [u \ v]$
- 3 Verzerrungen $\vec{\epsilon} = [\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \gamma_{xy}]$
- 3 Spannungen $\vec{\sigma} = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \tau_{xy}]$

$$\sigma_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (2.10)$$

Die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen aus Abbildung 2.3 [10] ergeben in Matrixschreibweise Gleichung 2.11.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

$$\vec{\epsilon} = \underline{D}\vec{u} = \underline{D} \cdot \underline{N}\vec{u} = \underline{B}\vec{u} \quad (2.12)$$

Aus den Dehnungen können mittels eines Werkstoffgesetzes die Spannungen berechnet werden. Als Werkstoffgesetz wird das Hooke'sche Gesetz betrachtet (Gleichung 2.13). Die Elastizitätsmatrix \underline{E} verknüpft die Spannungen $\vec{\sigma}$ mit den Dehnungen $\vec{\epsilon}$. Für linear isotropes Werkstoffverhalten können beim ebenen Spannungszustand eindeutige Beziehungen zwischen Verzerrungen und Spannungen hergestellt werden (Gleichung 2.14).

$$\vec{\sigma} = \underline{E}\vec{\epsilon} \quad (2.13)$$

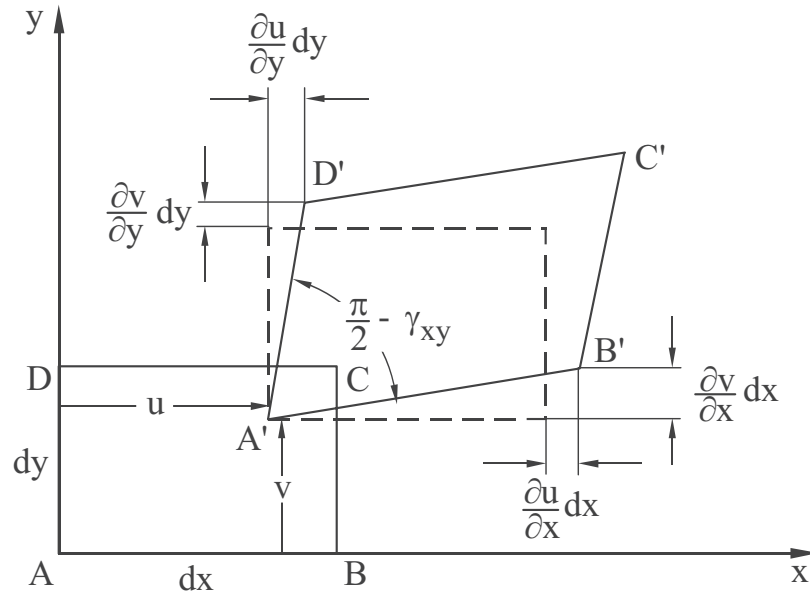


Abbildung 2.3.: Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen am ebenen Scheibenelement [10]

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten [20] lässt sich für die externen, an den Knoten wirkenden Kräfte Gleichung 2.15 aufstellen.

$$f_{ext} = \int_{(V)} \underline{B}^T \underline{E} \cdot \underline{B} dV \vec{u} = \underline{K} \vec{u} \quad (2.15)$$

2.1.4. Gaußpunkt-Integration

In der FE-Methode muss zur Bildung der Elementsteifigkeitsmatrix \underline{K} integriert werden. Das Bilden der Stammfunktionen erfolgt meist numerisch über die Gauß-Quadratur [20]. Die zu integrierende Funktion wird hierbei durch ein Polynom mit optimiert gewählten Stützstellen angenähert. Bei dieser Methode werden die Wichtungsfaktoren und die Lage der Stützstellen variiert. Die Lage der Stützstellen, auch Gaußpunkte

genannt, wird typischerweise im Einheitsintervall $\xi \in [-1; 1]$ angegeben. Da als freie Parameter sowohl die Wichtungsfaktoren als auch die Gaußpunkte zur Verfügung stehen, kann bereits mit n Stützstellen ein Polynom vom Grad $2n - 1$ exakt integriert werden. In Tabelle 2.1 [20] sind die Gaußpunkte dargestellt.

Anzahl Stützstellen	Stützstelle	Lage des Gaußpunktes	Wichtungsfaktor
1	1	0	2
2	1	0.577	1
	2	-0.577	1
3	1	0.775	0.556
	2	0	0.889
	3	-0.775	0.556
4	1	0.861	0.348
	2	0.340	0.652
	3	-0.340	0.652
	4	-0.861	0.348

Tabelle 2.1.: Lage und Wichtung der Gaußpunkte [20]

2.2. Strukturoptimierung

Im Maschinenbau sind Optimierungsaufgaben weit verbreitet. Häufig werden sie intuitiv oder durch Erfahrung gelöst z. B. im Bereich der Konstruktion. Bei einer Optimierung wird für ein definiertes Problem ein Optimum hinsichtlich festgelegter Parameter gesucht. Mathematisch betrachtet maximiert oder minimiert man eine Zielfunktion. Meistens wird die Zielfunktion zusätzlich durch Nebenbedingungen eingeschränkt. Eine analytische Lösung von komplexen Optimierungsproblemen ist häufig nicht möglich, daher werden diese numerisch gelöst. Zur Veranschaulichung der eben beschriebenen Begriffe wird ein Beispiel nach Schumacher [22] verwendet.

Ein oben offener Behälter mit quadratischer Grundfläche soll aus einem Blech hergestellt werden. Das Volumen soll mit einem Blechbedarf von 2 m^2 maximal sein. Die

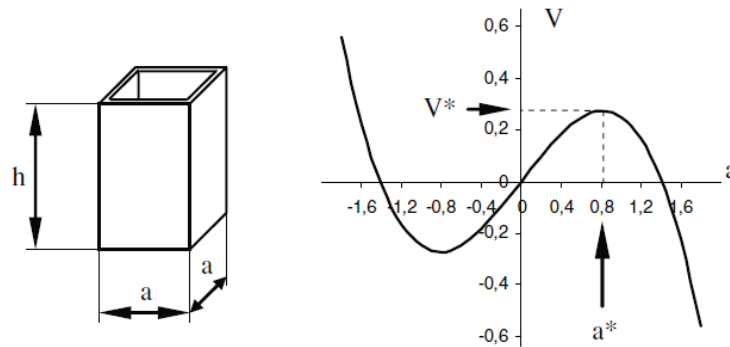


Abbildung 2.4.: links: Skizze des Behälters, rechts: Abhängigkeit der Seitenlänge vom Volumen bei gegebener Behälteroberfläche [22]

Wandstärke des Blechs ist bei der Berechnung vernachlässigbar. Wie müssen die Höhe h und die Seitenlänge a dimensioniert werden (siehe Abbildung 2.4 [22] links)?

Das Volumen setzt sich aus der Grundfläche und der Höhe zusammen (Gleichung 2.16).

$$V = a^2 * h \quad (2.16)$$

Die Oberfläche besteht aus der Grundfläche sowie den vier Seitenflächen (2.17).

$$O = a^2 + 4ah \quad (2.17)$$

Umgestellt nach h und eingesetzt in die Formel 2.16 ergibt sich das Volumen nach Gleichung 2.18.

$$V = \frac{a(O - a^2)}{4} \quad (2.18)$$

$V(a)$ ist die Zielfunktion, welche maximiert werden soll. In diesem Fall ist h abhängig von a und ergibt sich aus einem Optimum a^* und der in der Aufgabenstellung festgesetzten Oberfläche. Optimalpunkte werden in dieser Arbeit mit einem Stern bezeichnet. Die Extremwerte der Zielfunktion lassen sich über die Nullstellen der ersten Ableitung der Funktion finden (Gleichung 2.19).

$$\frac{dV}{da} = \frac{O - 3a^2}{4} = 0 \quad (2.19)$$

Mit der zweiten Ableitung kann überprüft werden, ob es sich um ein Minimum oder ein

Maximum handelt (Gleichung 2.20).

$$\frac{d^2V}{d^2a} = -\frac{3}{2}a \quad (2.20)$$

Die Optima aus der ersten Ableitung können in die zweite Ableitung eingesetzt werden. Ist das Ergebnis positiv, handelt es sich um ein Minimum, bei negativem Ergebnis um ein Maximum. Bei einem Wert gleich Null ist es ein Sattelpunkt.

Durch Auflösung der ersten Ableitung nach a erhält man: $a_{1,2}^* = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ m. Eine negative Seitenlänge ist physikalisch nicht möglich. Zur Verhinderung solcher Probleme können Nebenbedingungen eingeführt werden. In diesem simplen Beispiel soll jedoch nur darauf hingewiesen werden, da das Einführen von Nebenbedingungen die Aufgabe komplexer gestalten würde. Hier erübrigt sich das Einführen sogar, da beim Einsetzen des negativen Optimums die zweite Ableitung größer als Null wird und es sich somit um ein Minimum handelt. Gesucht ist jedoch ein Maximum, welches sich beim Einsetzen des zweiten (positiven) Optimums in die zweite Ableitung ergibt.

Die optimale Seitenlänge a^* ist somit $a^* = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,8165$ m (siehe Abbildung 2.4 [22] rechts). Die Höhe h^* ergibt sich aus der Gleichung 2.17 für die Oberfläche zu $h^* = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,408$ m.

2.2.1. Gradientenbasierte Verfahren

Gradientenbasierte Verfahren sind iterative Verfahren. Die Anzahl solcher Verfahren ist groß, daher wird nur ein Überblick gegeben. Weiterführende Literatur ist in [22] oder in [13] beschrieben. Neben diesen Verfahren, welche sehr effizient lokale Optima ermitteln, werden vermehrt stochastische Suchstrategien angewandt [22]. Ein großer Vorteil dieser Strategien ist, dass sie besser das globale Optimum finden, jedoch wesentlich mehr Rechenzeit als gradientenbasierte Verfahren benötigen, da sie keine mathematische Formulierung zur Suchrichtung beinhalten und somit weniger zielgerichtet verfahren. Einige Beispiele für stochastische Optimierungsverfahren sind die Monte-Carlo-Methode, Evolutionsalgorithmen oder das Simulated Annealing. Bei der Monte-Carlo-Simulation wird ein Satz von zufällig generierten Startentwürfen auf das Problem angewandt und der beste Entwurf ausgewählt. Dieser Entwurf entspricht nicht zwingend dem Optimum, jedoch erhöht sich die Wahrscheinlichkeit mit steigender Anzahl an Entwürfen, das Optimum zu finden. Eine steigende Anzahl bedeutet jedoch auch eine Erhöhung der Rechenzeit. Die Implementierung eines solchen Verfahrens ist verglichen mit gradi-

entenbasierten Verfahren simpel.

Evolutionsalgorithmen bilden die Evolution im biologischen Sinne nach. Dabei sind beispielsweise Mutationen, Selektionen und Rekombinationen möglich. Das Simulated Annealing ist von dem Erstarrungsprozess von Schmelzen inspiriert und versucht den Abkühlungsprozess nachzubilden. Bei einem erhitzten Metall sorgt die langsame Abkühlung dafür, dass die Atome ausreichend Zeit haben, um stabile Kristalle zu bilden. Diese energiearmen Zustände befinden sich nahe am Optimum [22].

2.2.1.1. Methode des steilsten Abstiegs

Die Methode des steilsten Abstiegs gehört zu den simpelsten gradientenbasierten Verfahren und wird anhand eines einfachen Beispiels [18] erläutert. Betrachtet wird die folgende Funktion (2.21).

$$f(x, y) = (x - 3)^2 + 2y^2 \quad (2.21)$$

Iterative Lösungsverfahren benötigen einen Startwert. Dieser ist im Beispiel $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Der Gradient dieser Funktion wird in Gleichung 2.22 berechnet.

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dy} \end{pmatrix} f(x, y) = \begin{pmatrix} 2(x - 3) \\ 4y \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Er zeigt stets in Richtung des größten Anstiegs, deswegen ergibt sich für den größten Abstieg Gleichung 2.23 bzw. mit eingesetztem Startwert 2.24.

$$\vec{d} = -\nabla \cdot f(x, y) \quad (2.23)$$

$$\vec{d}_0 = -\nabla f(x, y)|_{\vec{x}_0} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Mit der nun bekannten Suchrichtung (Gleichung 2.24) muss noch die Schrittweite bestimmt werden. Dazu wird das Minimum der Funktion (Gleichung 2.25) gesucht.

$$\min f(\vec{x}_1) \quad (2.25)$$

wobei

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \lambda_0 \cdot \vec{d}_0 \quad (2.26)$$

Das Minimum ergibt sich zu Gleichung 2.27.

$$\lambda_0 = \frac{1}{3} \quad (2.27)$$

Somit berechnet sich \vec{x}_1 nach Gleichung 2.26 zu Gleichung 2.28.

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} +\frac{7}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

Das Einsetzen von \vec{x}_1 in Gleichung 2.23 führt zu der neuen Abstiegsrichtung \vec{d}_1 (Gleichung 2.29).

$$\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} +\frac{4}{3} \\ +\frac{4}{3} \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

Die Schrittweite ist zufällig wieder dieselbe wie in Gleichung 2.27:

$$\lambda_1 = \frac{1}{3} \quad (2.30)$$

Dadurch ergibt sich der nächste Punkt zu:

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} +\frac{25}{9} \\ +\frac{1}{9} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Nach dem gleichen Schema kann \vec{x}_3 berechnet werden (Gleichung 2.32).

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} +\frac{79}{27} \\ -\frac{1}{27} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} +2.926 \\ -0.037 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

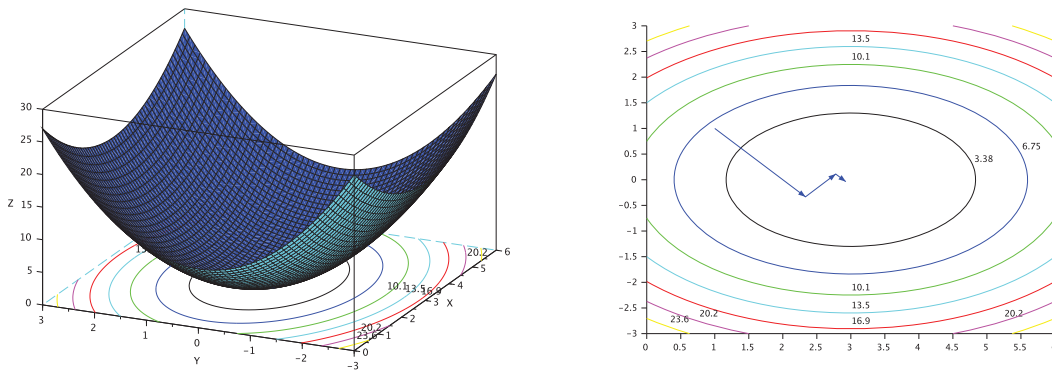


Abbildung 2.5.: links: 3D-Plot der Funktion (Gleichung 2.21), rechts: Höhenlinien der Funktion mit den einzelnen Schritten

Das Ergebnis ist schon relativ nah an der analytischen Lösung (Gleichung 2.33).

$$\vec{x}_{anal.} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

Bei der Methode des steilsten Abstiegs stehen jeweils zwei Richtungen senkrecht aufeinander. Dadurch entsteht der auf der rechten Seite in Abbildung 2.5 sichtbare „Zick-Zack“-Verlauf. Dieser kann zu Konvergenzproblemen führen, da möglicherweise in den einzelnen Iterationen um die Lösung im „Zick-Zack“ gesprungen wird und es zu keiner Konvergenz kommt. Deswegen gibt es Verbesserungen des Gradientenverfahren wie etwa das konjugierte Gradientenverfahren (CG), siehe [13].

2.2.1.2. Modifizierte Methode der zulässigen Richtungen

Die modifizierte Methode der zulässigen Richtungen (Modified Method of Feasible Directions, MMFD) ist eine Weiterentwicklung der Methode der zulässigen Richtungen (MFD) und ein direktes Abstiegsverfahren [22] [25]. Das Verfahren hat eine effiziente Suchrichtungsbestimmung und anstatt des „Zick-Zack“-Verlaufes ergibt sich ein Pfad entlang der Restriktion (siehe Abbildung 2.6 [22] $g(x)$). Die Suchrichtung p wird unterteilt in „brauchbare“ $p_{brauchb.}$ (Gleichung 2.34) und „zulässige“ $p_{zul.}$ (Gleichung 2.35) Richtungen. Die „zulässigen“ Richtungen liegen im zulässigen Bereich während die „brauchbaren“ Richtungen die Zielfunktion verbessern. Die Suchrichtung muss in der

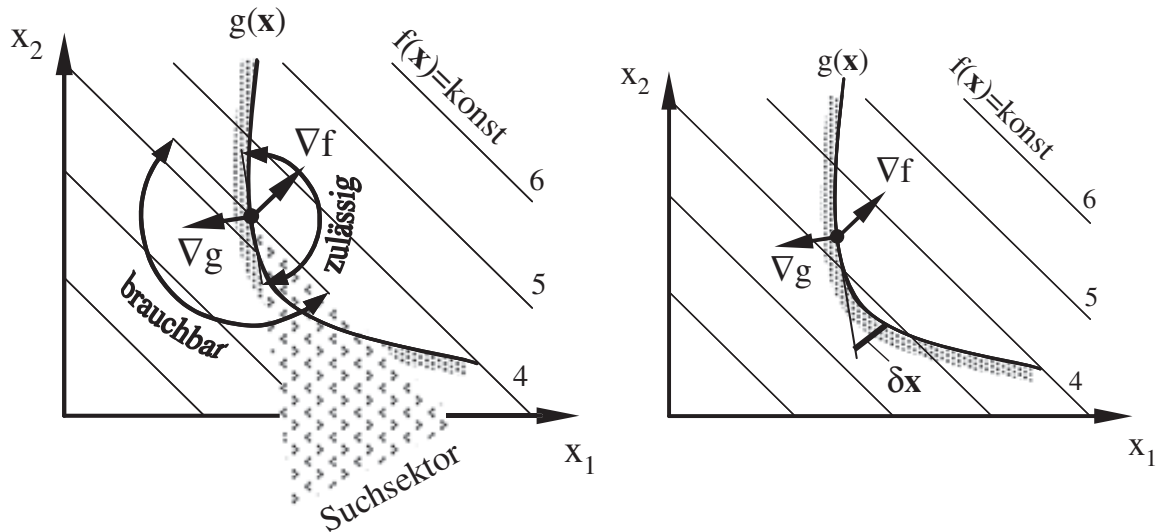


Abbildung 2.6.: links: Darstellung der Kriterien zur Suchrichtungsbestimmung [22],
rechts: bestimmte Suchrichtung [22]

Schnittmenge von $p_{zul.}$ und $p_{brauchb.}$ liegen. Das Verfahren benötigt einen Startpunkt im zulässigen Bereich.

$$\nabla f(x) \cdot p_{brauchb.} < 0 \quad (2.34)$$

$$\nabla g_j(x) \cdot p_{zul.} < 0 \quad (2.35)$$

2.2.1.3. Innere-Punkte-Verfahren

Bei dem Innere-Punkte-Verfahren handelt es sich um eine Optimierungsmethode, bei der das Optimum aus dem Inneren des zulässigen Bereichs gesucht wird. In anderen Verfahren wird entlang des Rands des zulässigen Bereichs gesucht. Durch einen kleiner werdenden Barriere-Parameter wird der Abstand zu den Restriktionen geregelt. Das Innere-Punkte-Verfahren gehört somit zur Gruppe der Barriere-Methoden. Es eignet sich gut für Probleme mit sehr vielen Variablen. Eine detaillierte Beschreibung des Verfahrens ist in der Literatur zu finden. [15] [17] [21]

2.3. Faserverbundwerkstoffe

Faserverbundwerkstoffe (FVW) stellen einen Teilbereich der Verbundwerkstoffe (VW) dar, welche in vielen Varianten vorhanden sind. So ist Stahlbeton auch ein Verbundwerkstoff. Die Idee dahinter stammt aus der Natur. Beispielsweise ist ein Baumstamm ein Faserverbund. Metalle wie Stahl haben meistens in jede Richtung die selben Eigenschaften (idealisiert), dies wird als Isotropie bezeichnet. Durch eine Ausrichtung der Fasern im FVW werden richtungsabhängige Eigenschaften im Material erreicht. Die orthogonal anisotropen Werkstoffe werden als orthotrop bezeichnet. Typischerweise haben FVW entlang ihrer Faserrichtung gute mechanische Eigenschaften (hoher E-Modul). Im Gegenzug dazu sind die mechanischen Eigenschaften quer zur Faserrichtung eher schlecht. Mit FVW sind Anpassungen des Materials auf bestimmte Anwendungen möglich. Im Sportbereich ist der Einsatz seit Jahrzehnten üblich, so werden z.B. Boote, Schläger aller Art und Segelflugzeuge aus FVW gefertigt. [26] [23] [11] [9]

2.3.1. Kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff

Kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff (CFK) gehört zu den Faserverbundkunststoffen (FVK). Ein FVK ist aufgebaut aus Fasern eingebettet in eine Matrix (lat. Gebärmutter), beispielsweise ein Epoxidharz. Zur klaren Abgrenzung gegenüber der mathematischen Bezeichnung Matrix wird im Folgenden die Faserverbundkunststoff-Matrix als FVK-Matrix bezeichnet. Der Faser-Matrix-Verbund heißt Laminat (Schicht). Die Fasern innerhalb einer Schicht werden meist in nur einer Richtung, unidirektional (UD), abgelegt. Das Fasermaterial bestimmt die Festigkeit des Verbunds. Die Faser ist zuständig für die Aufnahme von Zug- bzw. Druckspannungen. Die FVK-Matrix umgibt die Fasern, sorgt für die Einleitung der Kräfte in ebensolche und schützt diese vor äußeren Einflüssen. Außerdem ist sie für die Formgebung und das elastische Verhalten des Verbunds verantwortlich. [26]

2.3.2. Notation der Schichtfolge eines Laminates

Die Schichtfolge (Stacking) eines Laminates wird häufig wie in Gleichung 2.36 dargestellt [6].

$$[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n] \quad (2.36)$$

Dabei beschreibt θ_i die Orientierung der Einzelschicht i zur globalen Laminatachse.

Ein symmetrischer Laminataufbau wird mit einem s abgekürzt, wobei der Aufbau symmetrisch zur n . Lage ist (Gleichung 2.37).

$$[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]s \quad (2.37)$$

Sich wiederholende Schichfolgen werden mit $(\dots)_m$ (Gleichung 2.38) bezeichnet, dabei ist m die Anzahl der Wiederholungen.

$$[(\theta_1, \theta_2)_m, \dots, \theta_n] \quad (2.38)$$

Um Missverständnissen vorzubeugen, kann ein vollständig dargestellter Lagenaufbau mit t (total) gekennzeichnet werden. Zur Verdeutlichung ein Beispiel. Der in Gleichung 2.39 angegebene Lagenaufbau beschreibt den in Gleichung 2.40 ausformulierten Lagenaufbau.

$$[(0^\circ, 90^\circ)_2, 45^\circ]s \quad (2.39)$$

$$[0^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 45^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 0^\circ, 90^\circ, 0^\circ]t \quad (2.40)$$

2.3.3. Versagenskriterien

Bei isotropen Werkstoffen werden häufig Vergleichsspannungshypothesen verwendet, um mehrachsige Spannungszustände mit einachsigen Spannungen zu vergleichen. Eine häufig verwendete Hypothese für isotropes Material ist die von-Mises-Vergleichsspannung. Für Faserverbundwerkstoffe müssen andere Versagenskriterien verwendet werden. Dazu lässt sich das Versagen der ersten Einzelschicht (First Ply Failure) betrachten, welches eine konservative Betrachtungsweise darstellt. Der „First Ply Failure“ wird meist als Versagen des gesamten Verbundes gewertet, da die Festigkeit und vor allem die Langzeitfestigkeit nach einem ersten Versagen abnehmen kann. Jedoch muss das erste Versagen einer Einzelschicht nicht zum endgültigen Versagen des Verbundes führen, sondern kann sogar in einer Spannungsverteilung resultieren, wodurch eine weitere Laststeigerung möglich wird [19]. Da Aussagen in Hinblick auf das Langzeitverhalten und fertigungsbedingte Bauteilfehler schwierig sind, ist eine konservative Betrachtung der Versagensspannung nicht abwegig. Generell sind die Versagenskriterien bei FVK mit Bedacht zu verwenden, da sie nur in bestimmte Problemfällen zutreffen und nicht allgemein gültig sind [7] [19].

Die Grenzwertkriterien *Maximum stress criterion* und *Maximum strain criterion* werden aufgrund ihrer Einfachheit häufig verwendet [6]. An Zugproben lassen sich im Zugversuch Kennwerte für die einzelnen Faserorientierungen ermitteln. Die aus diesen Versuchen ermittelten Zuggrenzen werden für jede Belastungsrichtung (x , y und xy) mit den am Bauteil auftretenden Spannungen verglichen und so der Sicherheitsfaktor für jede Richtung bestimmt. Die einzelnen Spannungskomponenten haben bei dieser Theorie keinen Einfluss auf die jeweils anderen.

Beim Tsai-Wu Kriterium [6] wird eine Interaktion der einzelnen Komponenten angenommen. Puck verwendet eine Kombination aus Grenzwertkriterium und Interaktionskriterium. Für Faserbruch wird ein Grenzwertkriterium angesetzt und für Zwischenfaserbruch ein Interaktionskriterium [6]. Das Puck-Kriterium ist eine Erweiterung der Mohr-Coulomb-Bedingung [2]. Bei Kriterien wie Puck oder Tsai-Wu müssen zusätzliche Parameter experimentell bestimmt werden. Bei Tsai-Wu ist es schwer, den Interaktionskoeffizient F_{12} zu bestimmen und das Kriterium gibt keine Auskunft über die Versagensart, da es nur aus einer Gleichung besteht. Diese Arbeit beschränkt sich auf das Kriterium der größten Spannungen, da die Auswahl des Versagenskriteriums für die Ergebnisse und die Untersuchungen kaum relevant ist. Zudem wird auf eine Unterscheidung von Zug- und Druckspannungen verzichtet. In Abbildung 2.7 ist ein Unterschied zwischen den einzelnen Versagenskriterien erkennbar und in Anhang B ist der Unterschied beim verwendeten Material zwischen Zug- und Druckbelastung sichtbar. Da es sich um eine Entwurfs-Optimierung handelt, können diese vernachlässigt werden.

2.3.4. Klassische Laminat-Theorie

In der Praxis treten in den seltensten Fällen ausschließlich einachsige Belastungen auf. Somit müssen mehrere Faserrichtungen in einem Mehrschichtverbund (MSV) realisiert werden. Zur mechanischen Charakterisierung des MSV gibt es verschiedene Ansätze. Ein üblicher ist die Klassische Laminat-Theorie (CLT), da sie gute Ergebnisse bei dünnwandigen Strukturen liefert und trotzdem mathematisch gut berechenbar ist. Dünnwandige Strukturen werden häufig mit Faserverbundstrukturen realisiert. In der CLT müssen jedoch folgende Annahmen getroffen werden [23]:

- Konstante Dicken der einzelnen Schichten
- Ebener Spannungszustand (keine Spannungen normal zur Laminebene)

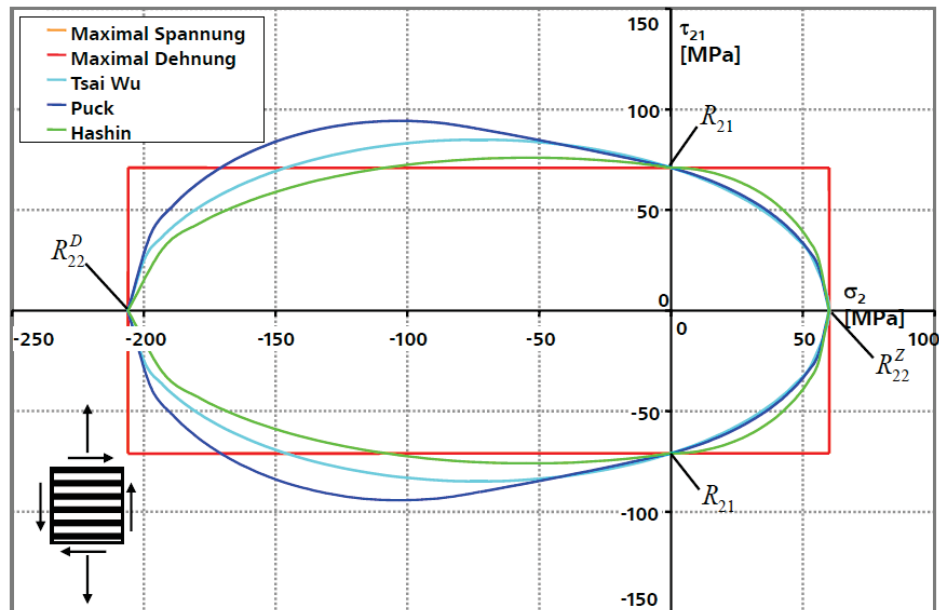


Abbildung 2.7.: Vergleich der Versagenskriterien als Bruchfläche bei Belastung senkrecht zur Faserrichtung [9]

- Einzelschichten eben und parallel zu Mittelebene des MSV
- Kleine Verformungen
- Lineares und elastisches Werkstoffverhalten
- Ideale Verklebung der Einzelschichten, keine Relativbewegung

Die zur Berechnung benötigten Werkstoffdaten lassen sich experimentell ermitteln. Die Steifigkeitsmatrizen werden schichtweise berechnet und anschließend wird daraus die Gesamtsteifigkeitsmatrix des Schichtverbundes gebildet. Bei Betrachtung einer Schicht wird ein lokales Koordinatensystem verwendet. Die Richtung 1 des Koordinatensystems zeigt in Richtung der Faser, Richtung 2 quer dazu und Richtung 3 in Dickenrichtung (Abbildung 2.8 [12] links). Das globale Koordinatensystem ist das KOS des MSV. Beschrieben wird es durch die Richtungen x , y und z , wobei z in Dickenrichtung des Laminates zeigt (Abbildung 2.8 [12] rechts).

Aus der linearen Mechanik ist das Hooke'sche Gesetz bekannt (Gleichung 2.41).

$$\vec{\sigma} = \underline{E} \cdot \vec{\epsilon} \quad (2.41)$$

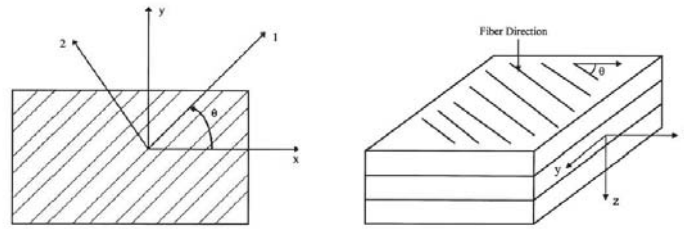


Abbildung 2.8.: Definition des Koordinatensystems in der Laminat-Theorie, links: lokales KOS, rechts: globales KOS [12]

Äquivalent wird für eine Schicht die Steifigkeitsmatrix \underline{C} (Gleichung 2.42) berechnet [12].

$$\vec{\sigma}_k = \underline{C}_k \cdot \vec{\epsilon}_k \quad (2.42)$$

Unter Berücksichtigung des ebenen Spannungszustandes ergibt sich Gleichung 2.43 in Matrizenschreibweise.

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

wobei

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ C_{12} &= \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ C_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ C_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Die Steifigkeitsmatrix ist symmetrisch und aufgrund der Orthotropie in der CLT sind Elemente außerhalb der Ebene (C_{13}, C_{23}) nicht vorhanden und somit Null. Der Übergang von dem lokalen zu dem globalen KOS geschieht über eine Transformationsmatrix \underline{T}

(Gleichung 2.45).

$$\underline{T}_k = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Damit lassen sich lokale Dehnungen (Gleichung 2.46) oder Spannungen (Gleichung 2.47) in das globale KOS transformieren.

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \underline{T}_k^T \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \underline{T}_k^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \underline{T}_k^{-1} \cdot \underline{C}_k \cdot \underline{T}_k^{-T} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Bei einer 0°-Faserausrichtung ist keine Transformation nötig. Die Transformationsmatrix entspricht der Einheitsmatrix. Somit ergibt sich \underline{C}_{0° nach Gleichung 2.48.

$$\underline{C}_{0^\circ} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Bei einer 90°-Ausrichtung müssen lediglich die ersten beiden Spalten und Zeilen der \underline{C}_{0° -Matrix vertauscht werden (Gleichung 2.49). Dies ergibt sich aus der Multiplikation

der Steifigkeitsmatrix \underline{C} von links sowie von rechts mit \underline{T}_{90° .

$$\underline{C}_{90^\circ} = \begin{pmatrix} C_{22} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Im Falle einer 45° -Ausrichtung werden durch Schiefwinkligkeiten zum globalen KOS auch andere Elemente der Matrix (Gleichung 2.50) besetzt.

$$\underline{C}_{45^\circ} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} a + 4C_{66} & a - 4C_{66} & b \\ a - 4C_{66} & a + 4C_{66} & b \\ b & b & C_{11} + C_{22} - 2C_{12} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

wobei

$$a = C_{11} + C_{22} + 2C_{12}$$

$$b = C_{11} - C_{22}$$

Die Steifigkeitsmatrix (Gleichung 2.51) für den -45° -Fall unterscheidet sich gegenüber Gleichung 2.50 lediglich in den Vorzeichen bei den b-Termen.

$$\underline{C}_{-45^\circ} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} a + 4C_{66} & a - 4C_{66} & -b \\ a - 4C_{66} & a + 4C_{66} & -b \\ -b & -b & C_{11} + C_{22} - 2C_{12} \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Aus den Gleichungen 2.42 bis 2.51 lässt sich die Steifigkeitsmatrix des MSV berechnen. Diese wird auch ABD-Matrix genannt. Sie stellt die Beziehung zwischen Dehnungen am Gesamtlaminat und entsprechenden Linienlasten her. Zusammengesetzt wird die ABD-Matrix aus drei Untermatrizen, wobei A der Scheibenquadrant, B der Koppelquadrant

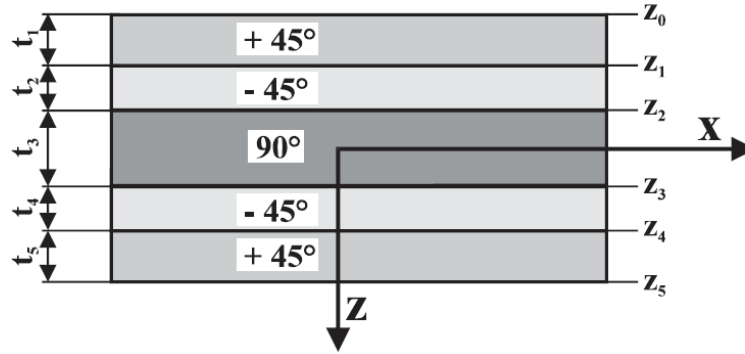


Abbildung 2.9.: Skizze eines Mehrschichtverbunds zur Veranschaulichung von z_k [8]

und \underline{D} der Plattenquadrant ist.

$$\begin{pmatrix} \vec{n} \\ \vec{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{B} & \underline{D} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{\epsilon}_0 \\ \vec{\kappa} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

Dabei sind $\vec{\epsilon}_0$ die Dehnungen und $\vec{\kappa}$ die Krümmungen im MSV.

Die einzelnen Matrix-Anteile werden über die Summation der Einzelsteifigkeiten und den Abständen zum Ursprung (Gleichung 2.53) [12] berechnet.

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \sum \underline{C}_k (z_k - z_{k-1}) \\ \underline{B} &= \frac{1}{2} \sum \underline{C}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ \underline{D} &= \frac{1}{3} \sum \underline{C}_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (2.53)$$

Hierbei ist z_k der Abstand der aktuellen Lage zum Ursprung des MSV im globalen Koordinatensystem (Abbildung 2.9). Bei einem symmetrischen Mehrschichtverbund erhalten alle Einträge innerhalb der \underline{B} -Matrix den Wert Null, da sich durch die geraden Exponenten die positiven und negativen Abstände (z_k) aufheben. Die Dehnung ist somit von der Biegung beim symmetrischen MSV entkoppelt.

Der \underline{A} -Anteil ist unabhängig von der Reihenfolge der Schichten. Bei dem \underline{B} - bzw. \underline{D} -Anteil spielt die Stapelfolge jedoch eine wesentliche Rolle, da diese auf die Biegung einen Einfluss hat. Die Biegespannung über den Querschnitt beim Balken wächst zum Rand hin und ist dort am größten. Somit wird die Biegung beeinflusst, wenn z. B. (für

den Belastungsfall) steifere Lagen in die Randschichten gelegt werden. In Anhang C sind zur Verdeutlichung der Thematik Beispiel-Rechnungen zu finden.

In einigen Anwendungen ist es sinnvoll, die Anteile der \underline{ABD} -Matrix bezüglich der Gesamtdicke des MSV zu normieren (Gleichung 2.54).

$$\begin{aligned}\underline{A}_n &= \frac{1}{t} \underline{A} \\ \underline{B}_n &= \frac{1}{t^2} \underline{B} \\ \underline{D}_n &= \frac{12}{t^3} \underline{D}\end{aligned}\tag{2.54}$$

2.3.5. Abweichungen von der Klassischen Laminat-Theorie

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden einige Vereinbarungen getroffen, um den numerischen Optimierungsprozess zu vereinfachen. Dabei werden einige Ansätze aus dem kommerziellen Programm HyperSizer (siehe Abschnitt 2.4) verwendet. In der Klassischen Laminat-Theorie wird mit einem definierten Lagenaufbau (diskrete Laminates) gerechnet. Eine Optimierung diskreter Laminates ist am einfachsten, indem lediglich die einzelnen Lagendicken des vordefinierten Aufbaus optimiert werden. Auf andere Weise ist eine Optimierung von Laminates in der FEM-Software Nastran (siehe Kapitel 3) mit bereits implementierten Funktionen nicht möglich. Die Änderung des Lagenaufbaus ist in Nastran bisher nicht vorgesehen. Die Optimierung der Lagenwinkel ist in Nastran zwar möglich, führt jedoch nicht zu dem gewünschten Ergebnis. Der Einfluss des Winkels auf das Design-Ziel (Gewichtsminimierung) ist nur indirekt vorhanden. Durch eine Veränderung der Dicke wird direkt das Design-Ziel beeinflusst. Eine Winkeländerung hat eine Änderung der Spannungsverteilung im Bauteil zur Folge und führt dadurch mittelbar zu einer Gewichtsänderung. Die numerische Optimierung gestaltet sich dadurch als schwierig, zumal auch nicht vorhergesagt werden kann, in welchem Maße eine Winkelveränderung zu einer Gewichtsveränderung führt. Einige Tests an einem Balken haben gezeigt, dass eine Optimierung des Winkels nicht zufriedenstellend möglich ist. Eine bloße Lagenoptimierung eines gegebenen Stackings ist jedoch in den meisten Fällen nicht ausreichend. Sobald Momente im Bauteil auftreten, beeinflusst das Stacking massiv das Ergebnis der Optimierung. Ein einfaches Beispiel soll dies verdeutlichen. Die \underline{ABD} -Matrix eines symmetrischen Laminates (Material siehe Anhang B)

mit dem Stacking $[0, 90]_s$ und Lagendicken von 1 mm ergibt sich nach Gleichung 2.55.

$$\underline{ABD}_{[0,90]_s} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 333210 & 11979 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11979 & 333210 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16800 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 145297 & 15973 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15973 & 743263 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22400 \end{array} \right) 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (2.55)$$

Durch ein Vertauschen des Stackings zu $[90, 0]_s$ ergibt sich eine andere \underline{ABD} -Matrix (Gleichung 2.56).

$$\underline{ABD}_{[90,0]_s} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 333210 & 11979 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11979 & 333210 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16800 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 743263 & 15973 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15973 & 145297 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22400 \end{array} \right) 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (2.56)$$

Aufgrund des symmetrischen Aufbaus ist der \underline{B} -Anteil in beiden Fällen Null. Der \underline{A} -Anteil bleibt auch gleich, da die \underline{A} -Matrix unabhängig vom Stacking ist. Bei einer reinen Normalkraft-Beanspruchung macht es keinen Unterschied, wo die einzelnen Lagen liegen. Über die \underline{D} -Matrix wird die Dehnung infolge eines Momentenflusses berechnet, deswegen ändert sich diese bei Veränderung des Stackings. In diesem einfachen Fall führt ein Vertauschen der Lagen zu einem Vertauschen des D_{11} -Elementes mit dem D_{22} -Element. Im Falle des $[90, 0]_s$ Stackings ist das D_{11} -Element mehr als fünfmal so klein wie im 1. Fall. Dadurch wird die Optimierung natürlich beeinflusst. Am Beispiel eines Kragbalkens unter reiner Biegung ergibt sich eine etwa fünfmal so große maximale

Auslenkung mit äußeren 0° -Lagen.

Eine Alternative zu einem diskreten Lagenaufbau ist ein effektiver Lagenaufbau, wobei die einzelnen Lagen zu einer einzigen "verschmiert" werden. Somit werden nur noch Anteile der einzelnen Lagenorientierungen sowie eine Gesamtdicke des Laminates als Design-Variablen berücksichtigt. Die Anteile werden von nun an mit α , β und γ bezeichnet, wobei:

- α : prozentualer Anteil an 0° -Lagen
- β : prozentualer Anteil an 90° -Lagen
- γ : prozentualer Anteil an $\pm 45^\circ$ -Lagen

In der industriellen Anwendung werden häufig gleiche Anteile von 45° -Lagen sowie -45° -Lagen im Laminat verwendet. Dadurch entfallen die in Gleichung 2.50 mit b bezeichneten Terme bei der \underline{A} - und \underline{D} -Matrix und beide Lagen können als ein Anteil zusammengefasst werden. In Gleichung 2.50 und 2.51 ist zu sehen, dass sich die Steifigkeitsmatrizen bis auf die b -Terme nicht unterscheiden. Bei einer späteren Verwendung der Entwurfsoptimierung muss natürlich berücksichtigt werden, dass in dem γ -Anteil zu gleichen Teilen 45° wie -45° Lagen vorhanden sind.

Die Realisierung in Nastran erfolgt dadurch, dass die Steifigkeitsmatrizen mit der jeweiligen Gewichtung zu einer Gesamtsteifigkeitsmatrix addiert werden. In Nastran wird für die \underline{A} - und \underline{D} -Matrix jeweils ein Material erstellt. Diese werden dann einem Schalenelement zugeordnet. Nastran erwartet dickennormierte Matrizen (siehe Gleichung 2.54). Dadurch und durch das verschmierte Laminat sind die \underline{A}_n - und \underline{D}_n -Matrizen identisch. Eine Beispiel-Rechnung mit verschmiertem Laminataufbau ist in Anhang D zu finden. Durch das verschmierte Laminat ist eine Berechnung der Momentenbelastung nur näherungsweise möglich. Für eine Entwurfs-Optimierung ist dieses Verfahren jedoch ausreichend.

Des Weiteren ist es nicht trivial, aus einer optimierten \underline{ABD} -Matrix auf einen diskreten Lagenaufbau zu schließen. Mithilfe der prozentualen Verteilung und eventuellen Fertigungsrestriktionen kann ein Stacking gebildet werden, dieses ist aber keinesfalls eindeutig. Die Automatisierung dieses inversen Problems ist kaum möglich.

Zur Implementierung der zuvor genannten Abweichungen von der CLT in Nastran müssen große Teile der Funktionen zur Optimierung von Laminaten selbst geschrieben werden, da die in Nastran vorgefertigten Methoden nicht mehr verwendet werden

können. So muss beispielsweise das angewandte Versagenskriterium selbst programmiert werden. Mehr dazu im folgenden Kapitel.

2.4. HyperSizer

HyperSizer ist ein Programm zur Strukturoptimierung, welches ursprünglich von der NASA entwickelt wurde. Seit 1996 wird es von der Collier Research Corporation weiterentwickelt und kommerziell vertrieben [24]. In HyperSizer können Sätze von effektiven Laminaten generiert werden. Dazu wird ein Basis-Material ausgewählt und die Grenzen der prozentualen Lagenverteilung festgesetzt. Mit einer wählbaren Schrittweite wird dann ein Satz von Laminaten erstellt. Ein Bauteil kann in HyperSizer in mehrere Komponenten aufgeteilt werden. Jede dieser Komponenten wird einzeln optimiert. Dazu muss der generierte Laminat-Satz zugewiesen werden sowie ein Bereich, in dem die Dicke variieren kann. Je feiner die Schrittweite bei der Dicke und zur Erstellung des Laminat-Satzes gewählt wird, desto genauer kann das Ergebnis der Optimierung werden. Jedoch führt eine Erhöhung der Schritte auch zu mehr Kombinationen und dadurch zu einer längeren Rechenzeit. HyperSizer verwendet externe Löser (Solver) zur Berechnung der Belastungen (Elementkräfte) des Modells. Dabei lassen sich gängige FE-Löser wie Nastran, Ansys oder Abaqus verwenden. Aus der Input-Datei der FE-Programme kann direkt die FEM-Geometrie geladen werden. HyperSizer benötigt eine Zuweisung der einzelnen Bauteile und zugehörigen Komponenten. Das Modell muss bereits vorher mit dem Solver berechnet werden, da für den Beginn der Optimierung die Kräfte bekannt sein müssen, damit diese zur Entwurfsberechnung im ersten Schritt verwendbar sind. Aus allen Element-Kräften einer Komponente wird in HyperSizer eine Vergleichsspannung gebildet. Jede Komponente wird als ein Panel betrachtet. Die Optimierung geschieht hinsichtlich des minimalen Gewichts. Durch einen iterativen Prozess werden die einzelnen Panelmassen minimiert und dadurch versucht, eine globale Massenminimierung zu erreichen. In den einzelnen Schritten wird jeweils ein gewähltes Design an den Solver übergeben und die im Bauteil auftretenden Spannungen werden anschließend wieder eingelesen. Ein Optimum ist in HyperSizer gefunden, sobald die Komponenten nicht mehr variieren und sich somit das Gesamtgewicht nicht mehr ändert.

3. NASTRAN

NASTRAN (NAsa STRuctural ANalysis) wurde von der NASA in den 60er Jahren als FE-Programm entwickelt und ist in Fortran geschrieben. Es wird u. a. von MSC Software vertrieben. Nastran ist ein reiner Solver und hat somit keine grafische Oberfläche. Als Prä- und Postprozessor kann Patran verwendet werden, welches ebenfalls von MSC Software entwickelt wurde. Aufgrund seiner Entstehung und langen Geschichte ist Nastran in der Luft- und Raumfahrttechnik weit verbreitet.

3.1. Elemente

In dieser Arbeit wird nur ein Element-Typ verwendet: *CQUAD4*. Dabei handelt es sich um ein zweidimensionales Rechteck-Schalenelement mit vier Knoten. Die vier Knoten definieren die Mittelebene des Elements. Über die Dicke des Elementes werden zwei Ebenen definiert, die Z1- und die Z2-Ebene. In diesen Ebenen werden die Spannungen berechnet. Zu jedem *CQUAD4* kann ein Offset von der Schalenebene zur Mittelebene entlang der z-Achse definiert werden (siehe Abbildung 3.1). Der Offset ist z. B. sinnvoll, wenn ein Element nur in eine Richtung wachsen soll, um die Außengeometrie eines Körpers zu erhalten.

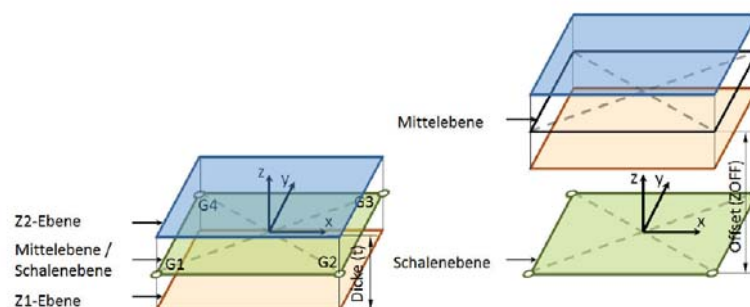


Abbildung 3.1.: Aufbau eines *CQUAD4* Elementes in NASTRAN [1]

3.2. NASTRAN Solution 101 (SOL101)

Nastran benötigt eine Input-Datei (Dateiendung: .bdf/.dat im ASCII Format). Zu Beginn der Datei muss der Typ der Lösung angegeben werden. Im einfachsten Fall ist das eine linear statische Analyse, welche in Nastran SOL101 heißt. In einer Input-Datei stehen die Befehle zur Beschreibung und Berechnung des Modells. Eine Input-Datei ist bei Nastran unterteilt in Blöcke (Sections). Innerhalb dieser Blöcke ist die Reihenfolge der Befehle egal, da diese von Nastran blockweise sortiert werden [14] [16].

Eine einfache Datei besteht typischerweise aus den folgenden Blöcken:

- Executive Control – Angabe der Solution, Laden von Includes
- Case Control – Auswahl der Belastungsfälle und Festhaltungen, Steuerung der Ausgabe
- Bulk Data – Beschreibung des Modells mit Knoten, Elementen, Belastungen, Festhaltungen, etc.

Eine vollständige Input-Datei findet sich im Anhang E.

Mit *CEND* wird der Executive Control Block geschlossen. Über *BEGIN BULK* wird der Bulk Data Block angekündigt. Das Ende der Bulk Data wird mit *ENDDATA* gesetzt.

Parameter beginnen mit dem *PARAM* Befehl gefolgt von dem zu setzenden Parameter. Über *GRID* werden die einzelnen Knoten angelegt. Mit den Knoten können dann die Elemente (*CQUAD4*) erstellt werden. Die Elemente werden mit *PSHELL* als Schalenelemente angelegt. Die Schalenelemente benötigen ein zugewiesenes Material. Für orthotropes Material kann *MAT2* verwendet werden. Zum Schluss müssen noch die Randbedingungen (*SPC*) und die Belastungen (*LOAD*) angelegt werden.

3.3. NASTRAN Solution 200 (SOL200)

Eine Designoptimierung wird in Nastran über die Solution 200 gestartet. Dazu wird eine statische Analyse (SOL101) erweitert. Die numerische Optimierung erfolgt in Nastran mit gradientenbasierten Verfahren. Ausgewählt werden können zwei verschiedene Arten von Verfahren, IPOPT und MSCADS (siehe Kapitel 2.2.1). Bei IPOPT geschieht die Optimierung mit dem Innere-Punkte Verfahren. MSCADS hingegen ist eine Sammlung von vier verschiedenen Optimierern, welche je nach Anwendungsfall von Nastran

automatisch ausgewählt werden. Dadurch wird eine Anpassung des Optimierers auf eine gegebene Problemstellung möglich. Die vier Optimierungsmethoden (siehe Kapitel 2.2.1) sind dabei:

- MMFD
- SLP
- SQP
- SUMT

Die Solution 200 benötigt mindestens die folgenden Angaben:

- Design-Ziel (*DESOBJ*)
- Design-Subcase (*DESSUB*)
- Design-Variable (*DESVAR*)
- Design-Antwort (*DRESP_x*)
- Beschränkungen (*DCONSTR*)
- Hinzufügen von Beschränkungen zum Design-Subcase (*DCONADD*)
- Parameter für Optimierung (*DOPTPRM*)

Eine lauffähige Input-Datei findet sich im Anhang F.

Da die Modell-Beschreibung bereits im Solution 101 erläutert wurde, beschränken sich die folgenden Ausführungen auf die Optimierung.

In der Case Control Section muss ein Design-Ziel festgelegt sein und ob es minimiert bzw. maximiert werden soll. Es muss ebenfalls mindestens ein Design Subcase definiert sein. Zum angelegten Subcase können über *DCONADD* Beschränkungen (*DCONSTR*) hinzugefügt werden. Nur die hinzugefügten werden bei der Optimierung berücksichtigt. Die restlichen Angaben wie *DRESP1* oder *DESVAR* werden in der Bulk Data Section vorgenommen.

Über *DTABLE* lassen sich Variablen anlegen. Diese können in den weiteren Befehlen verwendet werden. In diesem Fall werden die Elemente der Steifigkeitsmatrizen \underline{C}_{0° , \underline{C}_{90° und \underline{C}_{45° sowie die zulässigen Spannungen definiert. Mit *DESVAR* lassen sich die

Design-Variablen erstellen, welche innerhalb der Optimierung angepasst werden. Dieses Beispiel verwendet vier Design-Variablen: die Dicke T sowie die Anteile α , β und γ . Die Dicke wird mit *PSHELL* verknüpft. Dies geschieht über *DVPREL1*.

Um die *ABD*-Matrix des Gesamtlaminats zu berechnen, lassen sich die Variablen zur Lagenverteilung (α , β und γ) indirekt über Funktionen mit dem Material *MAT2* ins Verhältnis setzen. Die einzelnen Steifigkeitsmatrizen werden dabei anteilig zur Gesamtsteifigkeitsmatrix \underline{C}_{ges} addiert. Im Falle eines symmetrischen Laminataufbaus sowie gleichen Anteilen an $\pm 45^\circ$ -Anteilen (siehe Kapitel 2.3.5) ist $\underline{C}_{ges} = \underline{A}_n = \underline{D}_n$ und \underline{B}_n ist gleich Null (aufgrund der Symmetrie).

Die Berechnung der zulässigen Spannungen erfolgt über die berechnete Gesamtsteifigkeitsmatrix. Zur Berechnung der zulässigen Spannungen werden nur Normalspannungen betrachtet und Einflüsse aus Biegung ignoriert, da aufgrund des verschmierten Laminates Aussagen zur Biegung nur bedingt möglich sind. Nach Gleichung 2.52 ergibt sich vereinfacht Gleichung 3.1.

$$\vec{n} = \underline{A}_n \cdot \vec{\epsilon}_{glob} \quad (3.1)$$

Als Normalspannung werden einfache Testspannungen (Gleichung 3.2) verwendet.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Gleichung 3.1 kann umgestellt werden nach $\vec{\epsilon}_{glob}$ (Gleichung 3.3).

$$\vec{\epsilon}_{glob} = \underline{A}_n^{-1} \cdot \vec{n} \quad (3.3)$$

Die in der jeweiligen Laminatschicht herrschende Spannung ergibt sich nach Gleichung 3.4.

$$\vec{\sigma}_{lok,\theta} = \underline{T}_\theta \cdot \underline{C}_\theta \cdot \vec{\epsilon}_{glob} = \underline{T}_\theta \cdot \underline{C}_\theta \cdot \underline{A}_n^{-1} \cdot \vec{n} \quad (3.4)$$

Der Spannungsvektor (Gleichung 3.4) wird elementweise mit den im Material zulässigen Spannungen verglichen. Dazu werden pro Element die erlaubten Spannungen durch die bei einer Testspannung auftretenden Spannung dividiert (Gleichung 3.5). Da keine Unterscheidung zwischen Zug und Druck stattfindet, kann dies direkt in den Rechnungen

durch Beträge berücksichtigt werden. Eine beispielhafte Berechnung wird in Anhang D durchgeführt.

$$\begin{aligned}\sigma_{allow.,x} &= \left| \frac{S_1^T}{\sigma_{lok.,x}} \right| \\ \sigma_{allow.,y} &= \left| \frac{S_2^T}{\sigma_{lok.,y}} \right| \\ \tau_{allow.,xy} &= \left| \frac{S_{12}}{\tau_{lok.,xy}} \right|\end{aligned}\tag{3.5}$$

Die Berechnung erfolgt für jede Orientierung der Laminatschicht, hier für $\theta = 0^\circ, 90^\circ$ und $\pm 45^\circ$.

Design-Variablen können beim gradientenbasierten Verfahren nicht Null, sondern lediglich vernachlässigbar klein werden. Als kleinster zulässiger Grenzwert bei den prozentualen Verteilungen wird ein Wert von $1 \cdot 10^{-4}$ (entspricht 0.01%) und ein Maximalwert von 1 (entspricht 100%) gewählt. Sobald eine Orientierung im Zuge der Optimierung verschwindend klein wird, ist für diese eine Berechnung der zulässigen Spannung nicht mehr nötig und darf auch nicht mehr berücksichtigt werden. Bereits ein geringer Anteil einer faktisch nicht vorhandenen Lage könnte bei der Berechnung einen großen Einfluss haben. Die einzelnen erlaubten Spannungen müssen in jedem Optimierungsschritt berechnet werden. Das Minimum der zulässigen Spannungen in einer Belastungsrichtung ist die Spannung, an der das Bauteil theoretisch zuerst versagen wird. Diese Spannungen können den drei auftretenden Spannungen im Bauteil (σ_x, σ_y und σ_{xy}) gegenübergestellt werden und dadurch lässt sich der jeweilige Sicherheitsfaktor (Margin of Safety, MOS) berechnen. In Nastran werden die Sicherheitsfaktoren über *DCONSTR* auf mindestens 1.0 beschränkt (Gleichung 3.6). Um eine normierte Verteilung von α, β und γ zu bekommen, wird die Summe der drei Verteilungen auf genau 1.0 gesetzt (Gleichung 3.7).

$$MOS \geq 1.0\tag{3.6}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1.0\tag{3.7}$$

4. Voruntersuchungen

In diesem Kapitel werden einige Voruntersuchungen vorgestellt. Diese sollen den Einstieg in die Thematik erleichtern. Die Vorversuche werden an einem Balken durchgeführt. Die Modellierung erfolgt mit 2D-Schalenelementen, bei denen jedoch das Verhältnis zwischen Länge und Breite groß ist. Dadurch kann das Modell in erster Näherung mit einem Balkenelement verglichen werden. Um die Optimierung hinsichtlich der resultierenden Lagenorientierungen zu untersuchen, werden beim Balken mehrere Lastfälle getestet. Ebenfalls findet eine Gegenüberstellung verschiedener Optimierer von Nastran statt.

4.1. Optimierung am Balken

Im Folgenden wird die Optimierung am Balken mit einigen Testfällen erprobt. Aufgrund des simplen Modells lässt sich das gewünschte Ergebnis für verschiedene Belastungsfälle mit analytischen Formeln nachrechnen und verifizieren. Grundlage für die Versuche ist ein linksseitig fest eingespannter Balken (Kragbalken) an dessen rechtem Ende Belastungen (Abbildung 4.1) eingebracht werden.

Der Balken hat eine Länge von $L = 100$ mm, eine Breite von 1 mm und es wird das Material aus Anhang B verwendet. Das Modell wird mit finiten Schalenelementen modelliert. Es besteht aus 10 Elementen des Typs *CQUAD4*. Die Einspannung wird durch

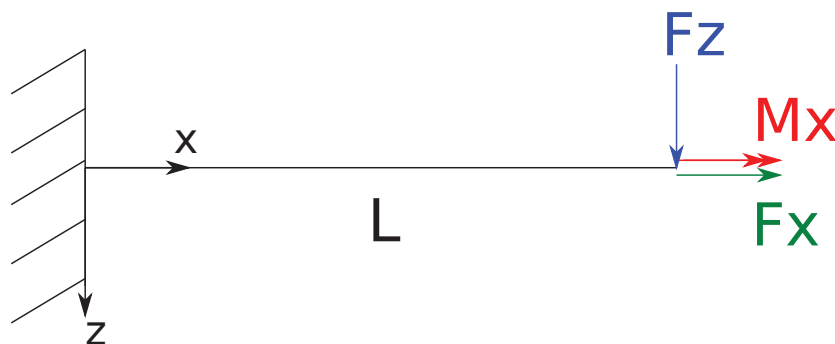


Abbildung 4.1.: Skizze des Balkens als Testproblem

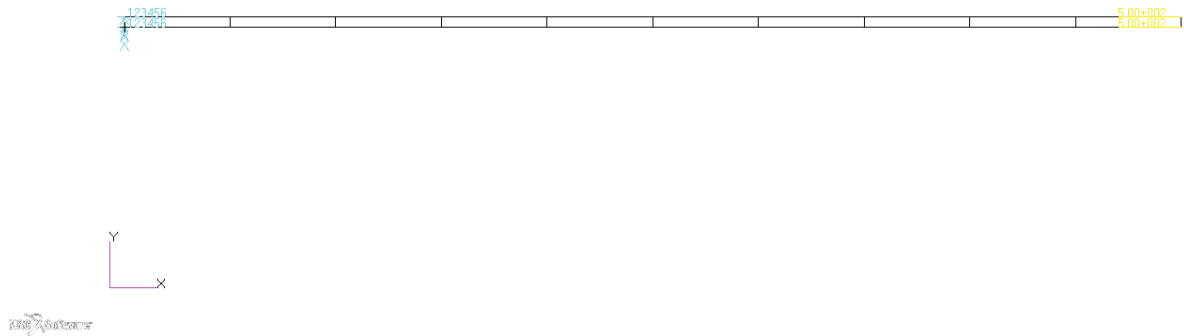


Abbildung 4.2.: FE-Modell des Balkens

das Sperren aller Freiheitsgrade an den zwei Randknoten am einen Ende realisiert und die Belastung wird auf die zwei Randknoten am anderen Ende des Balkens aufgebracht (Abbildung 4.2). Die Fasern sind entlang der x -Achse ausgerichtet. Die Optimierung startet mit einem Verhältnis der Lagenanteile von jeweils 30% ($\alpha, \beta, \gamma = 0.3$) und einer Gesamtdicke von 1 mm.

4.1.1. Optimierung unter Zugbelastung F_x

Bei einer reinen Zugbelastung $F_x = 1000$ N (siehe Abbildung 4.3) ist zu erwarten, dass bei der Optimierung lediglich 0° -Lagen übrig bleiben, da diese in ihrer Faserrichtung belastet werden und somit die höchsten Spannungen vorweisen. In Tabelle 4.1 wird dies bestätigt. Die Lösung aus beiden Verfahren stimmt mit der analytischen Lösung (Gleichung 4.3) nahezu überein (siehe Abbildung 4.4). Die Angaben zu der benötigten Zeit stammen von Nastran und dienen lediglich als Vergleich für die verschiedenen Optimierer. Wie in Abschnitt 3.3 bereits erläutert, ist die minimale Verteilung mit $1 \cdot 10^{-4}$ festgesetzt. Die zulässige Spannung in Faserrichtung (siehe Anhang B) von $2500 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ wird bei der Optimierung erreicht. Unter der Annahme, dass ausschließlich 0° -Lagen benötigt werden, lässt sich die analytische Lösung (Gleichung 4.3) für dieses

Problem zur Plausibilität heranziehen.

$$\sigma_{x,Max} = \frac{N}{A} \quad (4.1)$$

Dabei ist $N = 1000 \text{ N}$ und $A = bt$.

Mit der gegebenen Breite von $b = 1 \text{ mm}$ und Gleichung 4.1 umgestellt nach A (Gleichung 4.2) ergibt sich ein Flächeninhalt von 0.4 mm^2 [4]. Da die Breite 1 mm beträgt, ist die minimale Dicke (Gleichung 4.3) $t_{min} = 0.4 \text{ mm}$.

$$A = b \cdot t_{min} = b \frac{N}{\sigma_{x,Max}} = \frac{1000 \text{ Nmm}^2}{2500 \text{ N}} = \frac{2}{5} \text{ mm}^2 = 0.4 \text{ mm}^2 \quad (4.2)$$

$$t_{min} = \frac{A}{b} = \frac{0.4 \text{ mm}^2}{1 \text{ mm}} = 0.4 \text{ mm} \quad (4.3)$$

Verfahren [-]	Iterationen [-]	Zeit [s]	Dicke t^* [mm]	α^* [-]	β^* [-]	γ^* [-]
MSCADS	14	9	0.399	1	1E-4	1E-4
IPOPT	18	8	0.4	1	1.E-4	1.E-4

Tabelle 4.1.: Optimierung am Balken unter F_x

4.1.2. Optimierung unter Torsionsbelastung M_x

Durch das Aufbringen eines Momentes $M_x = 20 \text{ Nmm}$ entstehen fast ausschließlich Schubspannungen (siehe Abbildung 4.5) im Bauteil. Diese können am besten von $\pm 45^\circ$ -Lagen kompensiert werden. Nach der Optimierung stellt sich die erwartete Lagenverteilung ein (siehe Tabelle 4.2). Eine analytische Berechnung führt zu minimalen Abweichungen (Gleichung 4.6, Abbildung 4.6) gegenüber der optimierten Dicke in Nastran. Die Berechnung der Torsionsspannung geschieht über die Grundgleichung 4.4. Das Torsionsmoment M_T ist 20 Nmm und unter der Annahme, dass nur $\pm 45^\circ$ -Lagen verwendet werden, ergibt sich eine maximale Torsionsspannung von $\tau_{Max} = 1083 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$. Zur Berechnung vom Torsionswiderstandsmoment W_T wird als Querschnitt (Gleichung 4.5) ein schmales Rechteck angenommen [5].

$$\tau_{Max} = \frac{M_T}{W_T} \quad (4.4)$$



Abbildung 4.3.: Spannungsverlauf der x -Komponente am Balken unter Normalkraft F_x mit MSCADS-Optimierung

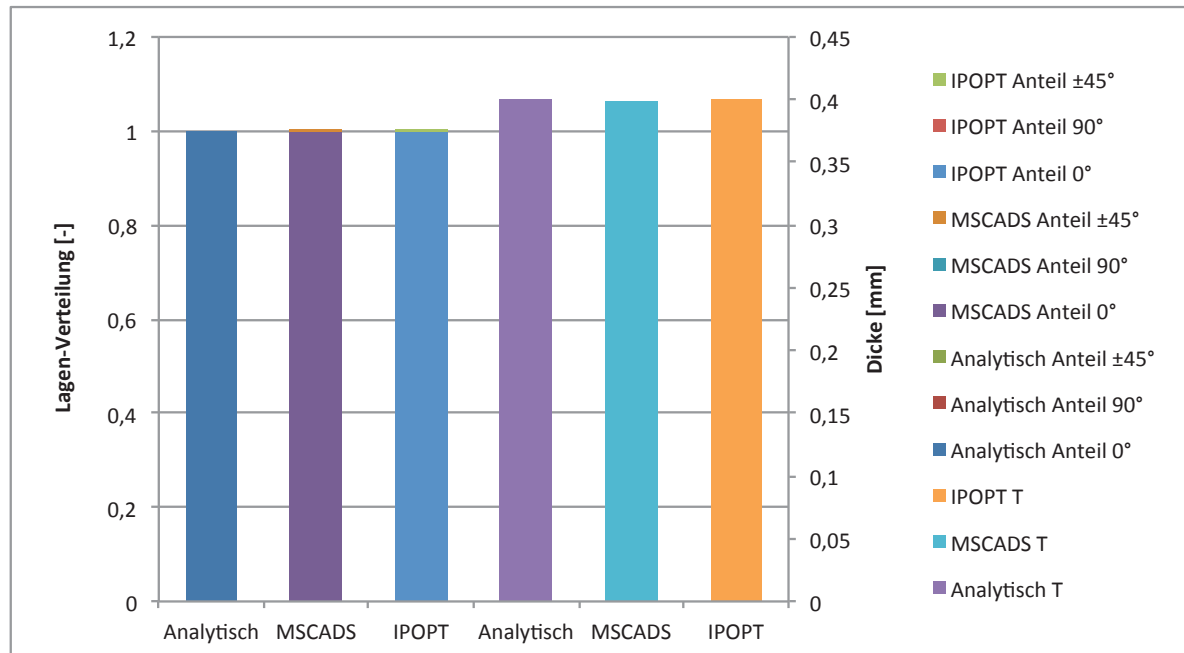
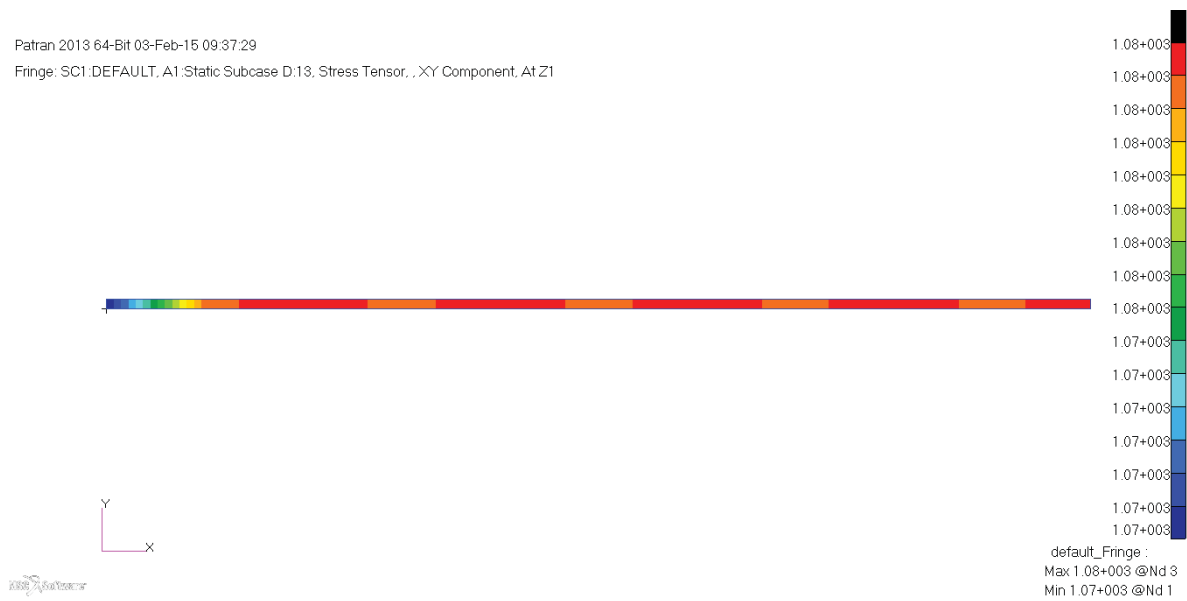


Abbildung 4.4.: Graphische Darstellung der Optimierungsergebnisse am Balken unter Normalkraft F_x

Verfahren [-]	Iterationen [-]	Zeit [s]	Dicke t^* [mm]	α^* [-]	β^* [-]	γ^* [-]
MSCADS	13	8	0.2359	1E-4	1E-4	1.0
IPOPT	25	11	0.236	9.9E-5	9.9E-5	0.999

Tabelle 4.2.: Optimierung am Balken unter M_x Abbildung 4.5.: Spannungsverlauf der xy -Komponente am Balken unter Schubmoment M_x mit MSCADS-Optimierung

$$W_T = \frac{1}{3}bt^2 = \frac{1}{3}1\text{mm} \cdot t^2 = \frac{M_T}{\tau_{Max}} = \frac{20}{1083} \frac{\text{Nmm} \cdot \text{mm}^2}{\text{N}} \quad (4.5)$$

$$t_{min} = \sqrt{\frac{3 \cdot 20}{1 \cdot 1083} \frac{\text{mm}^3}{\text{mm}}} = \sqrt{\frac{60}{1083} \text{mm}^2} = 0.2354\text{mm} \quad (4.6)$$

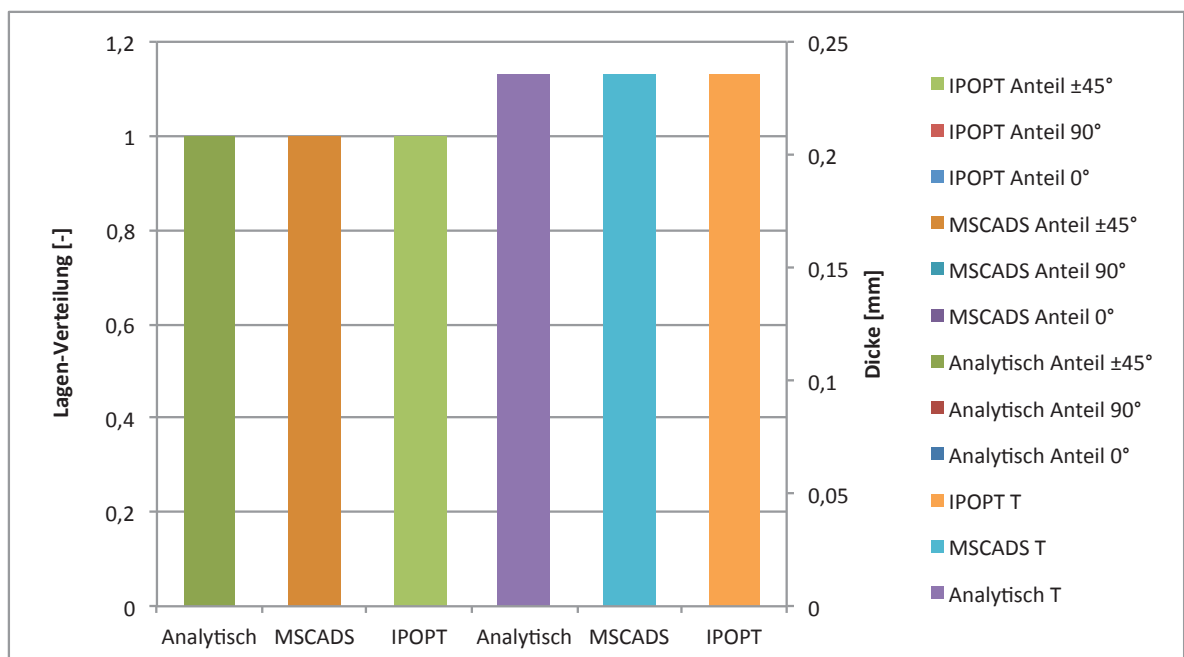


Abbildung 4.6.: Graphische Darstellung der Optimierungsergebnisse am Balken unter Schubmoment M_x

4.1.3. Optimierung unter Biegebelastung F_z

Im nächsten Fall wird eine Kraft $F_z = 10 \text{ N}$ (siehe Abbildung 4.7) aufgebracht. In der Abbildung ergeben sich die größten Spannungen an der Einspannung. Bei dieser Biegebelastung sollte das Ergebnis ausschließlich 0° -Lagen beinhalten. In diesem Fall stellt sich wieder die im Bauteil maximal zulässige Spannung von $2500 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ ein. Mit beiden Verfahren konvergiert dieser Testfall ebenfalls schnell mit der erwarteten Lagenverteilung (Tabelle 4.3) und entspricht der analytischen Lösung (Abbildung 4.8, Gleichung 4.9).

$$\sigma_{b,Max} = \frac{M_b}{W_y} \quad (4.7)$$

Die gegebenen Werte sind $F_z = 10 \text{ N}$ und $M_b = F_z \cdot l = 10 \text{ N} \cdot 95 \text{ mm} = 950 \text{ Nmm}$. Die Länge von 95 mm kommt zustande, da Nastran die Spannungen in der Element-Mitte berechnet und jedes Element 10 mm lang ist. Das Umstellen der Gleichung 4.7 nach dem Widerstandsmoment eines Rechtecks W_y ergibt Gleichung 4.8.

$$W_y = \frac{bt^2}{6} = \frac{M_b}{\sigma_{b,Max}} = \frac{950 \text{ Nmm} \cdot \text{mm}^2}{2500 \text{ N}} = \frac{19}{50} \text{ mm}^3 \quad (4.8)$$

Mit der Breite $b = 1 \text{ mm}$ und der Höhe t als gesuchte Größe ergibt sich Gleichung 4.9.

$$t_{min} = \sqrt{\frac{57}{25}} \text{ mm} = 1.51 \text{ mm} \quad (4.9)$$

Verfahren [-]	Iterationen [-]	Zeit [s]	Dicke t^* [mm]	α^* [-]	β^* [-]	γ^* [-]
MSCADS	8	6	1.509	0.998	2E-4	1E-4
IPOPT	9	7	1.51	0.999	9.99E-5	9.99E-5

Tabelle 4.3.: Optimierung am Balken unter F_z

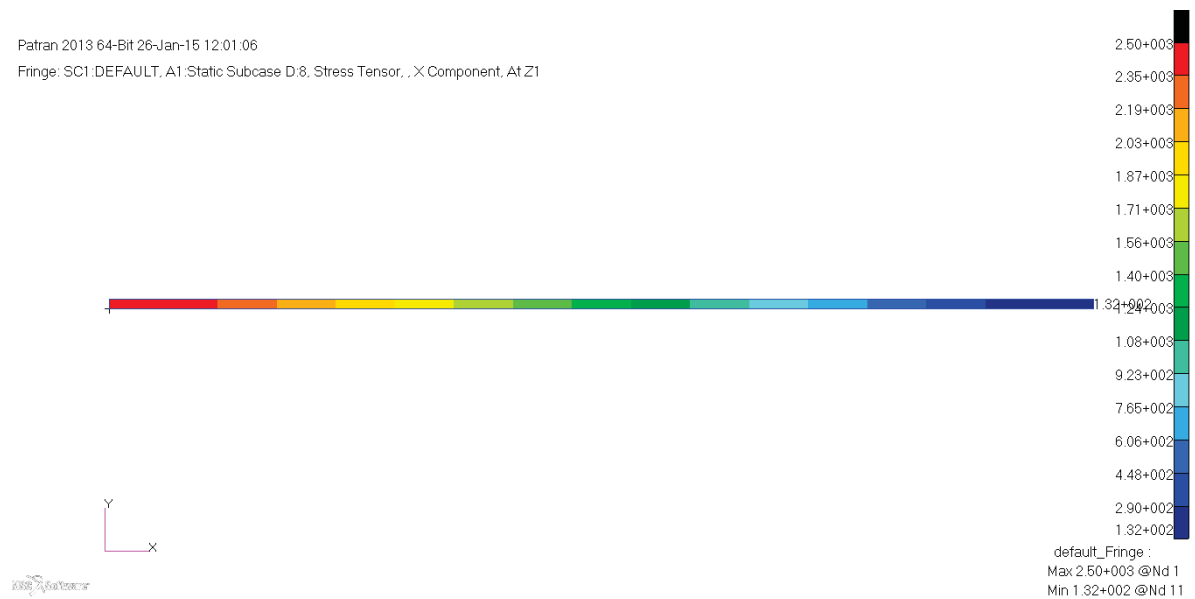


Abbildung 4.7.: Spannungsverlauf der x -Komponente am Balken unter Querkraft F_z mit MSCADS-Optimierung

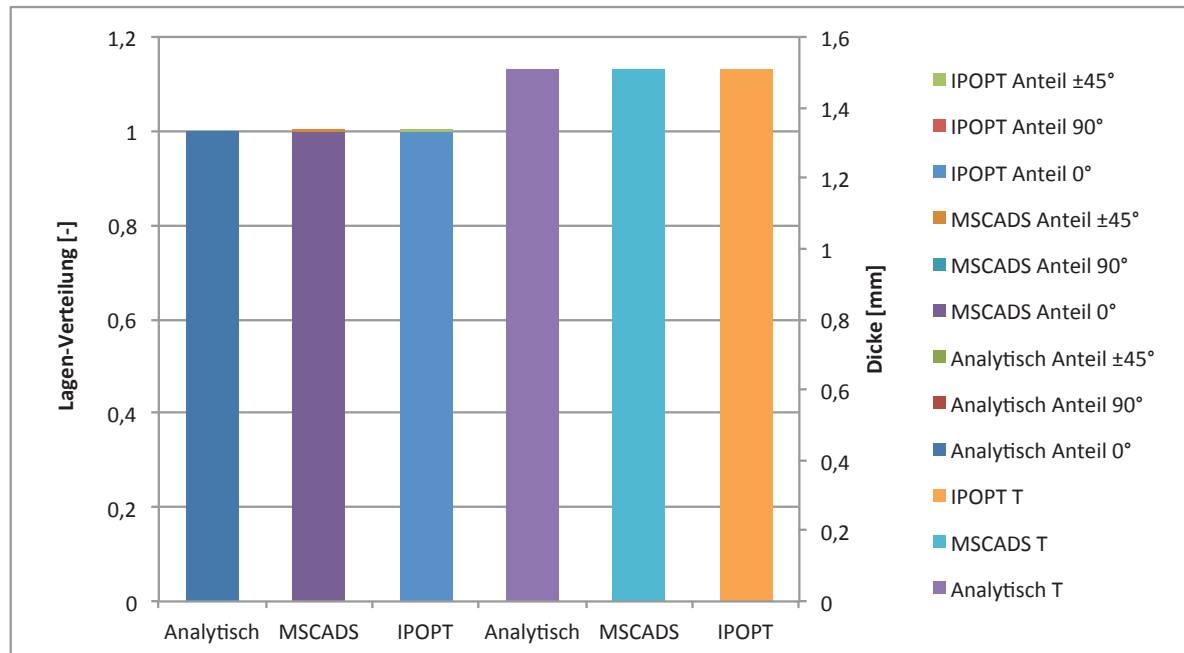


Abbildung 4.8.: Graphische Darstellung der Optimierungsergebnisse am Balken unter Querkraft F_z

4.1.4. Optimierung unter kombinierter Zug- und Torsionsbelastung F_x und M_x

Als letztes wird eine kombinierte Last aus einer Kraft $F_x = 1000 \text{ N}$ und einem Torsionsmoment M_x gewählt. Dabei wird bewusst versucht, das Torsionsmoment so zu wählen, dass sich zu gleichen Teilen 0° - und $\pm 45^\circ$ -Lagen ergeben. Bei dieser Verteilung ist die im Bauteil zulässige Spannung in x -Richtung $\sigma_x = 1124 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ und in xy -Richtung $\sigma_{xy} = 502 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ (siehe Abbildung 4.9 und 4.10). Nach dem gleichen Prinzip wie in Gleichung 4.1 bis 4.3 ergibt sich die minimale Dicke des Balkens nach Gleichung 4.10 zu $t_{\min} = 0.89 \text{ mm}$.

$$t_{\min} = \frac{F_x}{\sigma_x b} = \frac{1000}{1124 \cdot 1} \frac{\text{Nmm}^2}{\text{Nmm}} = 0.89 \text{ mm} \quad (4.10)$$

Verfahren [-]	Iterationen [-]	Zeit [s]	Dicke t^* [mm]	α^* [-]	β^* [-]	γ^* [-]
MSCADS	7	6	0.894	0.495	8.2E-4	0.505
IPOPT	44	20	0.895	0.495	9.2E-4	0.504

Tabelle 4.4.: Optimierung am Balken unter F_x und M_x

Mit dieser Dicke ergibt sich das Torsionsmoment M_x nach Gleichung 4.4 bis 4.6 zu 132.5 Nmm (Gleichung 4.11). Gewählt wird im weiteren Verlauf ein Torsionsmoment von 130 Nmm. Der Berechnungsansatz für das Torsionswiderstandsmoment W_T als schmales Rechteck ist grenzwertig, da die Beziehung $t \ll b$ nicht gilt. Die Berechnungsformel für ein beliebiges Rechteck ist jedoch komplexer. Da die Berechnung lediglich als Entwurf für ein Torsionsmoment gedacht ist, ist der Ansatz als Näherung vertretbar. Das Ergebnis der Optimierung in Tabelle 4.4 zeigt, dass sich die gewünschte Verteilung mit geringen Abweichungen (Abbildung 4.11) einstellt.

$$M_x = \sigma_{xy} W_T = 502 \frac{1}{3} 1 \cdot 0.89^2 \frac{\text{N mm}^3}{\text{mm}^2} = 132.5 \text{ Nmm} \quad (4.11)$$



Abbildung 4.9.: Spannungsverlauf der x -Komponente am Balken unter Normalkraft F_x und Schubmoment M_x mit MSCADS-Optimierung



Abbildung 4.10.: Spannungsverlauf der xy -Komponente am Balken unter Normalkraft F_x und Schubmoment M_x mit MSCADS-Optimierung

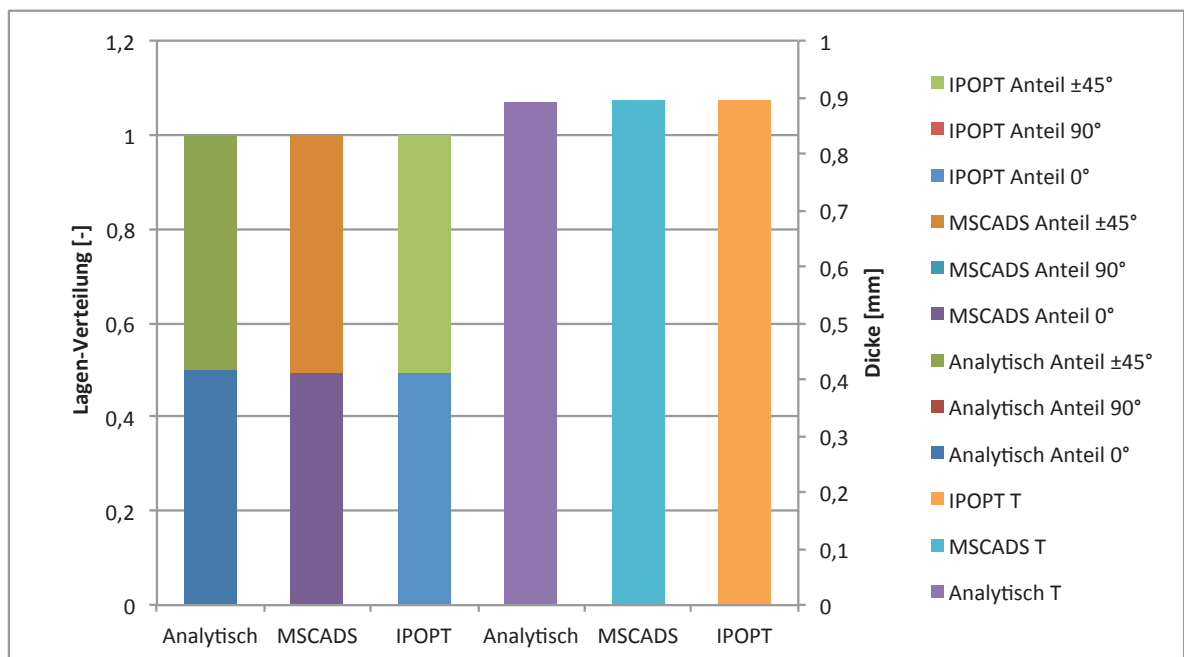


Abbildung 4.11.: Graphische Darstellung der Optimierungsergebnisse am Balken unter Normalkraft F_x und Torsionsmoment M_x

4.1.5. Variation der Startparameter zur Optimierung unter kombinierter Zug- und Torsionsbelastung F_x und M_x

Da bei dem Beispiel mit kombinierter Last am Ende der Optimierung mehr als eine Lagenart (α und γ) bestehen bleibt, eignet sich dieses zur Variation der Startwerte. Dadurch wird die Robustheit der beiden Optimierungsverfahren hinsichtlich der Wahl der Startparameter getestet. Zugleich konnte mit den Lastfällen der unter Abschnitt 3.3 entwickelte Algorithmus an ersten Beispielen getestet werden. Die Startwerte werden dabei nach Tabelle 4.5 variiert und die Ergebnisse sind in Tabelle 4.6 zu finden. Die Variation der Parameter führt in allen Fällen zur Konvergenz, lediglich eine Berechnung mit Abweichungen von fast 7% ist grenzwertig. Die einzelnen Ergebnisse sind in Abbildung 4.12 dargestellt. Beim besagten Ausreißer in der zweiten Berechnung ist ein Anteil von 4% an 90°-Lagen erkennbar, wodurch es zu einer größeren Dicke kommt. Das IPOPT-Verfahren benötigt durchweg für die Optimierung mehr Zeit. Im nächsten Abschnitt werden die beiden Verfahren verglichen.

Parameter-Satz [-]	Dicke t^* [mm]	α^* [-]	β^* [-]	γ^* [-]
1	1	0.9	0.05	0.05
2	1	0.05	0.9	0.05
3	1	0.05	0.05	0.9
4	0.1	0.3	0.3	0.3
5	100	0.3	0.3	0.3
6	100	0.05	0.9	0.05
7	0.89	0.5	0.01	0.5

Tabelle 4.5.: Gewählte Startparameter am Balken unter F_x und M_x

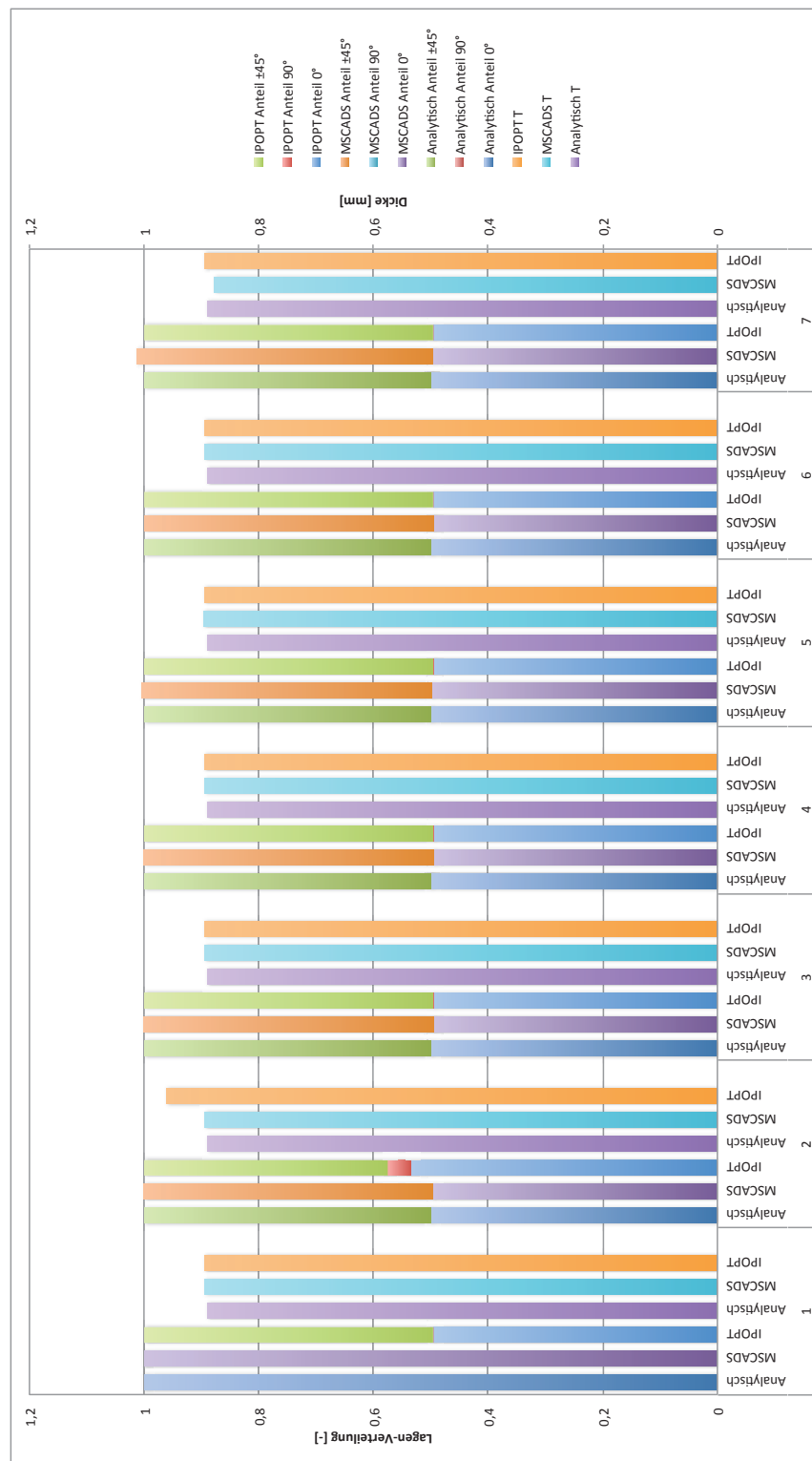


Abbildung 4.12.: Graphische Darstellung der Optimierungsergebnisse mit Variation der Startwerte am Balken unter Normalkraft F_x und Torsionsmoment M_x

Parameter [-]	Verfahren [-]	Iterationen [-]	Zeit [s]	Dicke t^* [mm]	α^* [-]	β^* [-]	γ^* [-]
1	MSCADS	12	9	0.894	0.496	1.2E-4	0.504
	IPOPT	51	22	0.895	0.495	9.2E-4	0.504
2	MSCADS	21	11	0.894	0.496	1E-4	0.504
	IPOPT	67	31	0.961	0.535	4E-2	0.425
3	MSCADS	9	7	0.894	0.495	7.4E-4	0.505
	IPOPT	36	15	0.895	0.495	9.1E-4	0.504
4	MSCADS	10	7	0.894	0.495	1E-4	0.505
	IPOPT	45	20	0.895	0.495	9.2E-4	0.504
5	MSCADS	15	9	0.896	0.498	6.5E-4	0.505
	IPOPT	49	21	0.895	0.495	9.2E-4	0.504
6	MSCADS	33	17	0.894	0.495	4.6E-4	0.504
	IPOPT	76	36	0.895	0.495	9.2E-4	0.504
7	MSCADS	4	5	0.878	0.496	9.2E-4	0.516
	IPOPT	51	24	0.895	0.495	9.2E-4	0.504

Tabelle 4.6.: Optimierung am Balken unter F_x und M_x von verschiedenen Startpunkten

4.2. Vergleich von IPOPT und MSCADS Optimierer

In einer vorangegangenen Arbeit von M. Charuto [1] wurden bereits bei isotropem Material die Unterschiede der beiden Optimierer analysiert. In der Arbeit stellte sich heraus, dass IPOPT das robustere, numerisch stabilere Verfahren ist. Jedoch war es auch das langsamere Verfahren. Die Erweiterung auf orthotropes Material steigert die Komplexität und dadurch erhöht sich die Anzahl der Design-Variablen. Somit ist das Bestreben nach einem stabilen Verfahren hoch. Zur Verifizierung der Ergebnisse von M. Charuto werden am Beispiel des Balkens noch einmal beide Verfahren hinsichtlich Dickenoptimierung, Dauer und Lagenverteilung gegenübergestellt.

Das Ergebnis der Untersuchung war unerwartet. Während es beim IPOPT-Algorithmus teilweise zum Abbruch des Programms kam, führte der MSCADS-Algorithmus immer zu einem Ergebnis. Der Abbruch beim IPOPT kommt aufgrund einer Division durch Null zustande. In den Berechnungen wird durch die prozentualen Lagenverteilungen dividiert. Die Summe der Verteilungen soll exakt eins ergeben. Der Versuch diese Nebenbedingung einzuhalten, kann im IPOPT dazu führen, dass mindestens eine Lagenverteilung gleich Null wird. Umgangen wird das Problem dadurch, dass vor dem Dividieren der Verteilungen auf die jeweiligen Anteile eine sehr kleine Zahl addiert wird. Damit wird das Ergebnis nur marginal beeinflusst, aber das numerische Problem verhindert. Das Ergebnis der Optimierung stimmt sowohl mit MSCADS- als auch mit IPOPT-Optimierer in allen getesteten Fällen gut mit den analytischen Werten überein. Lediglich bei der Variation der Startwerte mit dem Startparametersatz zwei führt der IPOPT-Algorithmus zu Abweichungen von 7% gegenüber dem analytischen Wert. Deutlicher ist jedoch der Unterschied bei den benötigten Zeiten zwischen den beiden zur Verfügung stehenden Optimierungsverfahren. Eine Iteration benötigt zwar im Schnitt beim IPOPT-Algorithmus weniger Zeit, 460 ms verglichen mit 660 ms bei MSCADS, jedoch sind beim IPOPT-Algorithmus meist viel mehr Iterationen notwendig. Besonders deutlich wird dieser Unterschied beim Betrachten der Ergebnisse aus der Variation der Startwerte (siehe Abbildung 4.13). Aufgrund der gesammelten Erfahrungen wird im weiteren Verlauf der Arbeit nur noch MSCADS als Optimierer verwendet.

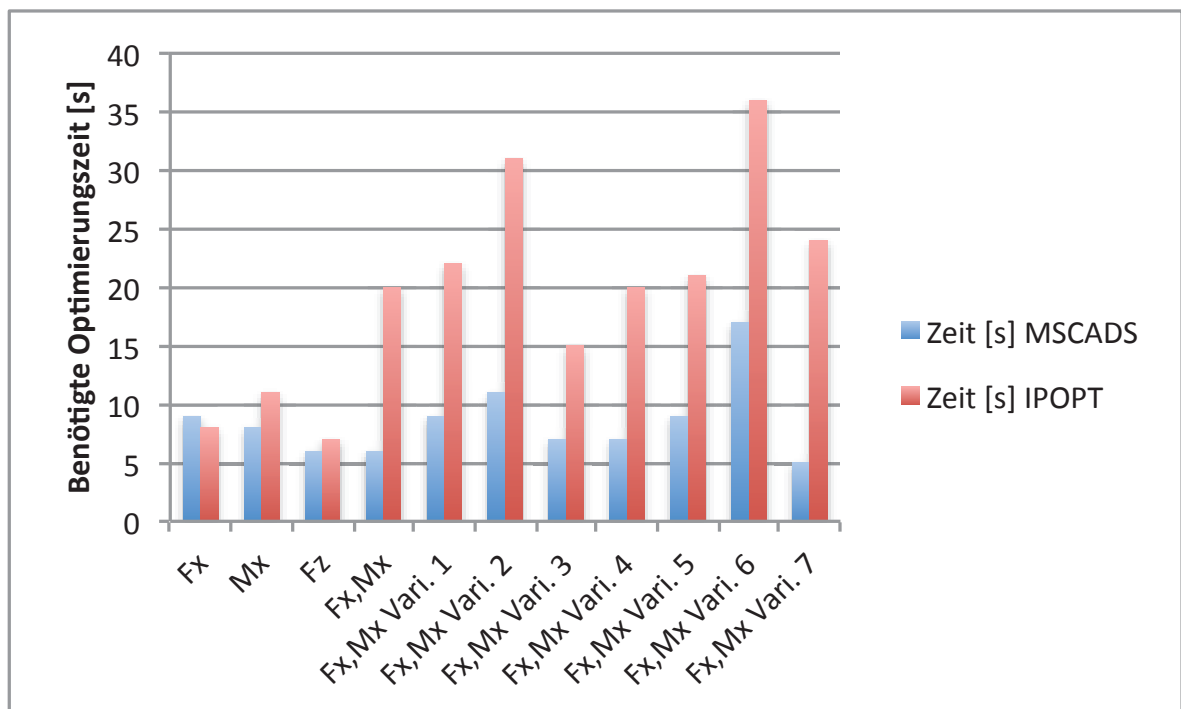


Abbildung 4.13.: Graphische Darstellung der Optimierungszeit zwischen IPOPT und MSCADS

5. Automatisierte Erweiterung auf komplexe Modelle

Anhand der Input-Dateien in Anhang E und F kann relativ schnell der Mehraufwand zwischen einer reinen statischen Analyse in Nastran (SOL101) und einer Optimierung (SOL200) erkannt werden. Bei einem sehr einfachen Beispiel nimmt die Anzahl der verwendeten Befehle stark zu. Würde ein diskreter Lagenaufbau optimiert werden, so wie es in Nastran bereits vorgesehen ist, dann würde die Anzahl der Zeilen nicht so stark wachsen. Bei einem verschmierten Lagenaufbau führt bereits das Optimieren eines weiteren Laminates zu einem großen Anstieg der benötigten Befehle. In Nastran werden alle Befehle über eine eindeutige Zahl (ID) angesprochen. Bei unterschiedlichen Befehlssätzen können Mehrdeutigkeiten auftreten. Es kann beispielsweise ein Knoten mit der ID 1 und ein *CQUAD* mit der gleichen ID geben. Allerdings muss innerhalb der definierten Materialien jede ID einmalig sein. Sofern es sich verhindern lässt ist aus Gründen der Übersichtlichkeit und zur Verhinderung von Mehrdeutigkeiten vom mehrmaligen Verwenden einer ID abzuraten. Da sich große Teile zur Optimierung jedes Laminates wiederholen, könnten Unterfunktionen (Subroutines) geschrieben werden. Allerdings ist der dazu nötige Aufwand innerhalb Nastran groß.

Deswegen wird mittels der Programmiersprache Python ein Skript entwickelt, welches eine Input-Datei mit linear statischer Analyse (SOL101) um eine Optimierung mit SOL200 erweitert. Dabei wird die in Kapitel 3.3 vorgestellte Optimierung so angepasst, dass sie das entworfene Grundgerüst zur Optimierung am Balken verwendet. Mit einer (die Erweiterung betreffenden) eindeutigen Nummerierung werden die einzelnen Befehle hinzugefügt und lediglich die IDs sowie die Bezeichnungen geändert. Die IDs aus der bestehenden SOL101 werden dabei nicht verändert. Die Nummerierung geschieht nach dem folgenden Schema:

- axxyy, wobei a: Befehlssatz [1–9], xx: fortlaufende Laminat-Nummer [01–99], yy: Befehls-ID [01–99]
- 1xxyy: *DESVAR* – Belegen der Design-Variablen

- 2xxyy: *DVMREL2* – Verändern der Materialparameter (ABD-Matrix)
- 3xxyy: *DRESP2* – Benötigt zur Berechnung von z.B. zulässigen Spannungen
- 4xxyy: *DEQATN* – Gleichungen für Berechnungen
- 5xxyy: *DCONSTR* – Grenzen festlegen für DRESPx
- 6xxyy: *DVPREL1* – Verändern der Laminatdicke
- 7xxyy: *DRESP1* – Design-Ziel (Gewicht) und Elementspannungen

Mit diesem Schema ist das Optimieren von bis zu 99 separaten Laminaten bzw. Laminat-Regionen möglich. Sofern dies nicht mehr ausreichend sein sollte, müsste die Notation dahingehend angepasst werden. Pro Befehlssatz und Laminat können 99 Befehle verwendet werden. Nach Möglichkeit haben zusammenhängende Befehle unterschiedlicher Befehlssätze die gleiche ID. Dadurch soll das Verständnis eines generierten Skriptes verbessert werden.

Einige Befehle müssen jedoch noch von Hand angepasst werden, wie z. B. die *PSHELL*- und *MATx*-Karten. Die *PSHELL*-Elemente werden mit 1 startend fortlaufend nummeriert und die *MATx*-Karten beginnen mit 1001. Das Python-Skript bedarf somit eventuell einiger kleiner Anpassungen für spätere Modelle. Es soll daher als Unterstützung gelten und ist nicht als vollautomatischer Konverter von SOL101 zu SOL200 zu sehen.

6. Strukturauslegung am Beispiel Flügelkasten

Die Beispiele in den bisherigen Kapiteln waren akademischer Natur. Deswegen soll die Komplexität in diesem Kapitel gesteigert und ein praxisnaher Use-case entwickelt werden. Als Beispiel bietet sich ein Kastenprofil an, welches eine vereinfachte Form eines Flügelkastens abbildet. Der Kasten besteht aus fünf Platten. Die Platten werden nummeriert und in Anlehnung eines Flügelkastens benannt:

- Platte 1: Oberhaut
- Platte 2: Unterhaut
- Platte 3: Vorderholm
- Platte 4: Mittelholm
- Platte 5: Hinterholm

Eine schematische Darstellung des Kastenprofils ist in Abbildung 6.1 zu sehen und die relevanten Werte befinden sich in Tabelle 6.1. Das Material wird wie zuvor (Anhang B) verwendet. Der Kasten ist am einen Ende fest eingespannt und wird am anderen Ende mit einer Kraft F belastet.

6.1. Aufbau des Modells

Das Finite Elemente Modell wird in Patran aufgebaut und anschließend in Nastran weiterverwendet und erweitert. Die Ober- und Unterhaut bestehen jeweils aus 160 Schalenelementen (20 Elemente lang, 8 Elemente breit) und die Holme bestehen jeweils aus 100 Schalenelementen (20 Elemente lang, 5 Elemente hoch). Insgesamt wird das Modell mit 620 Schalenelementen vom Typ *CQUAD4* (siehe Abbildung 6.2) aufgebaut. Die Elemente der einzelnen Platten werden mit je einer *PSHELL*-Karte beschrieben und die Nummerierung (*ID*) der Shells ist wie zuvor angegeben. Die feste Einspannung wird

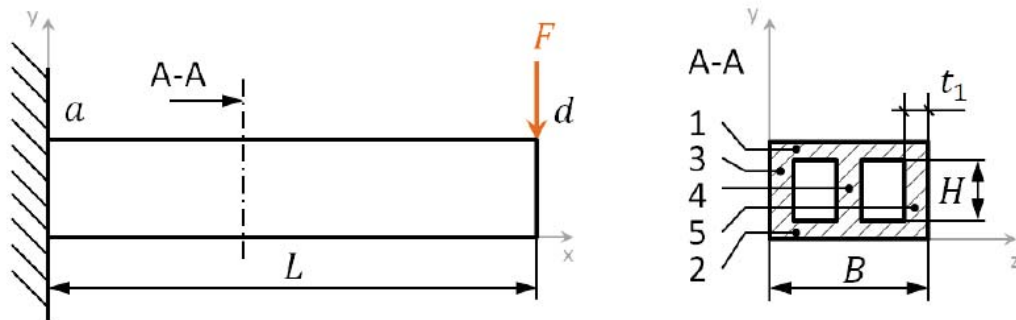


Abbildung 6.1.: Schematische Darstellung des Kastenprofils [1]

F	$150 \cdot 10^3 \text{ N}$
L	1000 mm
B	200 mm
H	150 mm
ρ	$1.58 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{mm}^3}$
S	1.0

Tabelle 6.1.: Werte zur Dimensionierung des Kastenprofils

durch ein Sperren aller sechs Freiheitsgrade der auf dem eingespannten Rand befindlichen Knoten realisiert und die Belastung F verteilt sich auf die am anderen Rand liegenden Knoten.

Zur Berechnung in Nastran erstellt Patran eine Input-Datei. In dieser Datei wird nachträglich für jede *PSHELL* ein eigenes Material (*MAT2*) definiert, beginnend mit der *ID* 1001. Anschließend kann das Python-Skript zur Generierung der nötigen Parameter für eine Optimierung verwendet werden. Um die Optimierung durchzuführen, wird dieses angepasste Skript von Nastran ausgeführt. Die Optimierungsparameter sind die gleichen wie bei dem Balken, nur dass jetzt anstatt einer Shell fünf Shells optimiert werden. Dadurch ergeben sich 20 Design-Variablen. Die Optimierung wird ausschließlich mit dem MSCADS-Optimierer durchgeführt, weil dieser robustere Ergebnisse liefert als der IPOPT-Algorithmus. Auf eine Berechnung einer analytischen Lösung wird an dieser Stelle verzichtet, da kaum vorhergesagt werden kann, welche Lagenverteilung sich in jeder Platte einstellen wird. Zudem ist die Spannungsverteilung in dem Kastenprofil

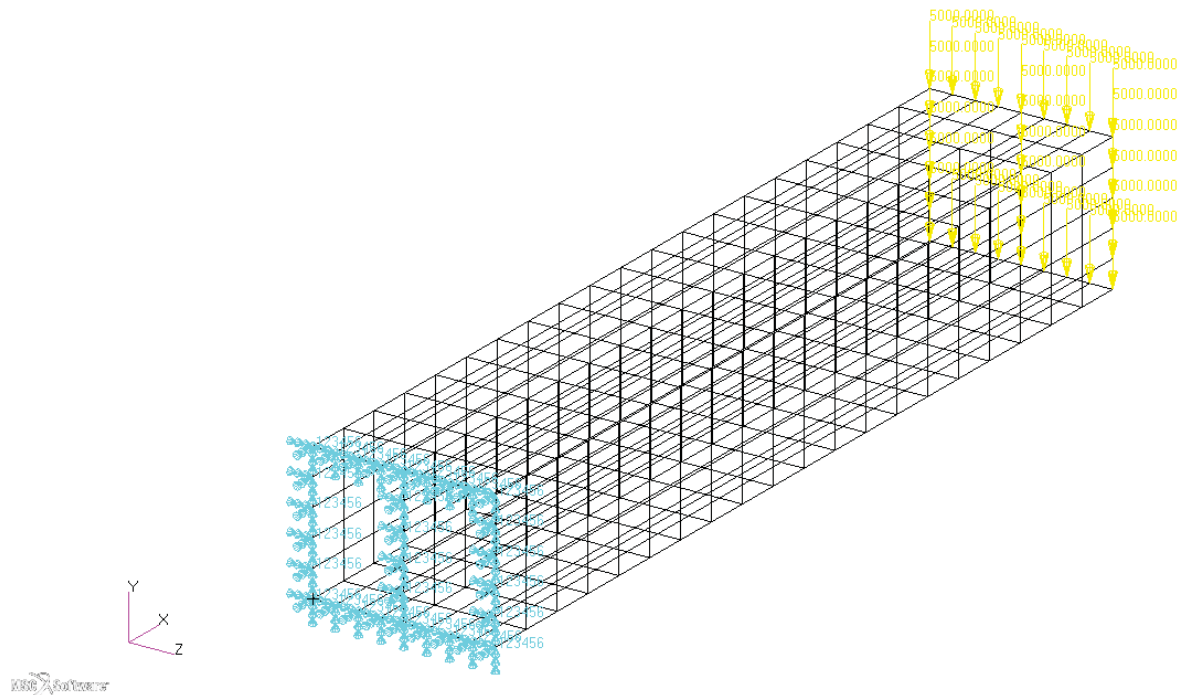


Abbildung 6.2.: Kastenprofil in finiten Elementen

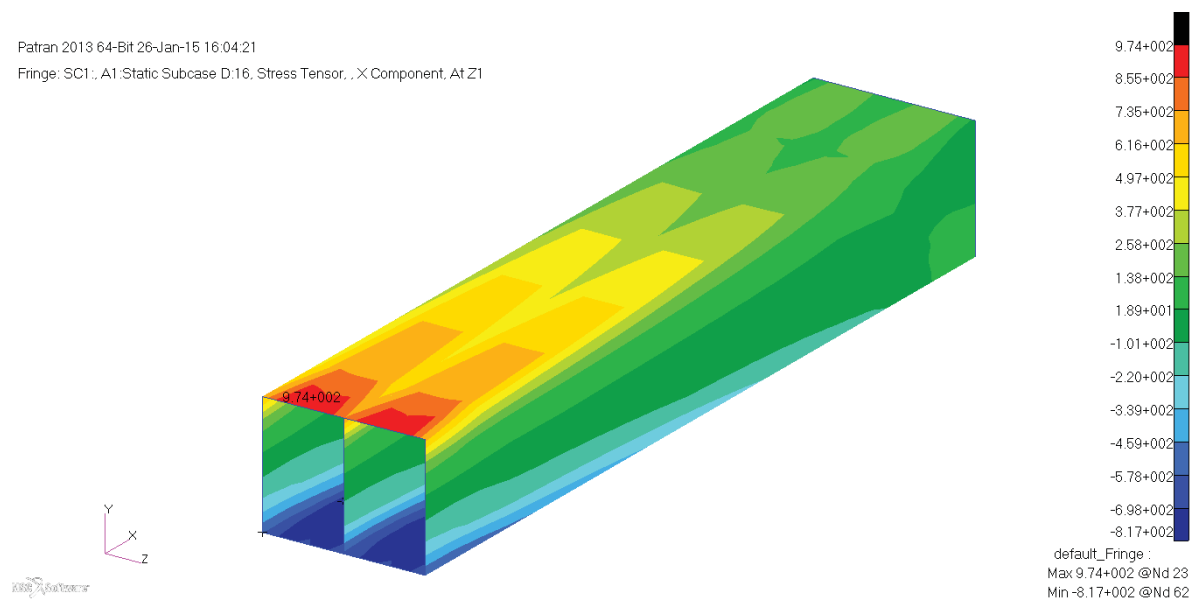
viel komplexer als in dem Balken. Als Startwerte werden die gleichen verwendet wie im vorherigen Kapitel 4, also Lagenverteilungen von jeweils 30% und Dicken von 1 mm pro Platte. In Kapitel 7 wird zum Vergleich das Kastenprofil noch mit HyperSizer optimiert.

6.2. Optimierung

Das Ergebnis der Optimierung ist in Tabelle 6.2 und in den Abbildungen 6.3 bis 6.5 dargelegt.

Die größten Spannungen in y -Richtung treten in allen Platten am belasteten Ende auf (Abbildung 6.4). In Abbildung 6.3 ist zu sehen, dass die betragsmäßig größten Spannungen in der x -Richtung in der Ober- und Unterhaut zu finden sind. Somit sollte in beiden Platten α den größten Anteil einnehmen. Die betragsmäßig größten Spannungen in xy -Richtung sind im Vorder-, Mittel- und Hinterholm zu finden (Abbildung 6.5). In diesen Platten müsste somit γ der vorherrschende Anteil sein. Die Vermutungen werden in Tabelle 6.2 bestätigt.

Platte [-]	Dicke t^* [mm]	α^* [-]	β^* [-]	γ^* [-]
Oberhaut (1)	6.32	0.67	0.22	0.11
Unterhaut (2)	5.4	0.6	0.36	0.04
Vorderholm (3)	0.39	0.08	0.08	0.84
Mittelholm (4)	0.77	0.03	0.22	0.76
Hinterholm (5)	0.41	0.07	0.11	0.82

Tabelle 6.2.: Optimierung am Kastenprofil mit *MSCADS*-OptimiererAbbildung 6.3.: Spannungsverlauf der x -Komponente am Kastenprofil mit *MSCADS*-Optimierung

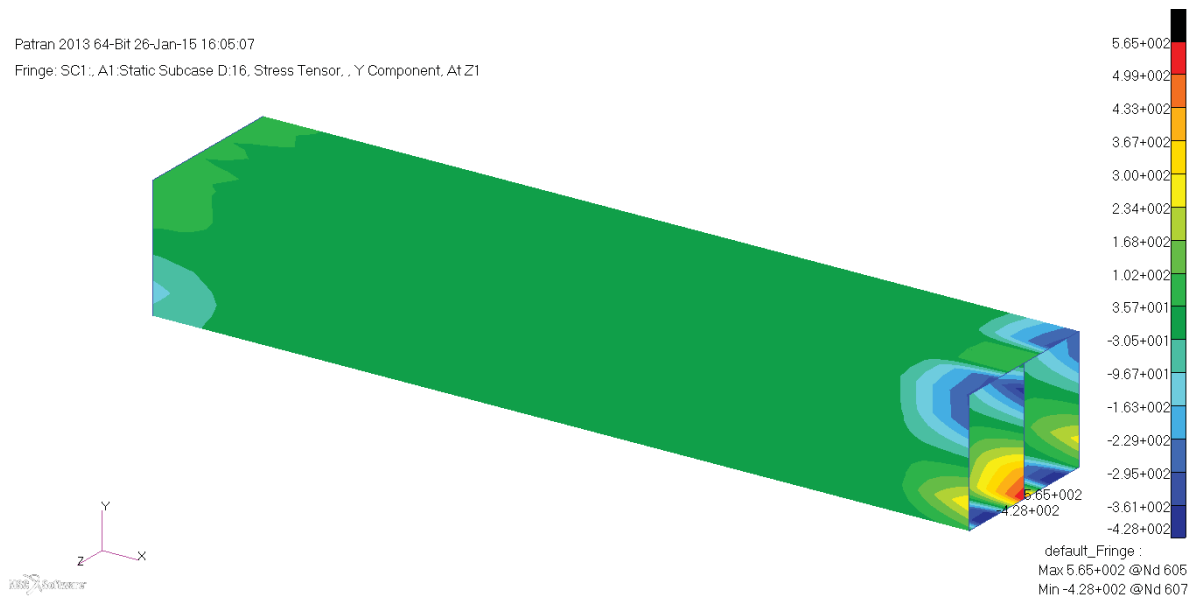


Abbildung 6.4.: Spannungsverlauf der y -Komponente am Kastenprofil mit MSCADS-Optimierung

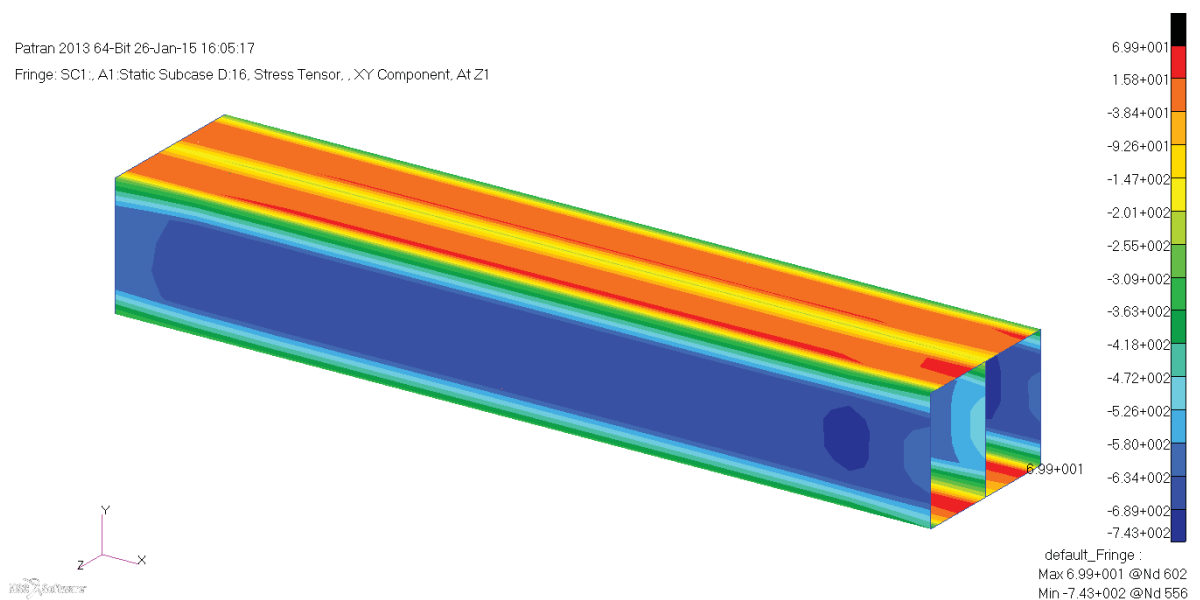


Abbildung 6.5.: Spannungsverlauf der xy -Komponente am Kastenprofil mit MSCADS-Optimierung

6.3. Variation der Start-Parameter

Die Startwerte der Design-Variablen werden wieder variiert, jedoch nur die Werte der Dicken. Die Lagenverteilungen α , β und γ werden mit je 30% festgesetzt ($\alpha, \beta, \gamma = 0.3$). Dadurch wird untersucht, wie wichtig ein gutes Start-Design für eine erfolgreiche Optimierung ist. Die gewählten Start-Parameter sind in Tabelle 6.3 zu finden und die Ergebnisse der Variation befinden sich in Tabelle 6.4 sowie 6.5. Die Anzahl der Iterationen in Tabelle 6.4 sind bei jeder Berechnung zufriedenstellend. An dem jeweiligen Gesamtgewicht des Bauteils lässt sich erkennen, dass in allen Fällen eine ähnlich gute Optimierung vollzogen wurde. Lediglich beim 4. Parameter-Satz liegt das Gewicht etwa 5% höher. Eine graphische Darstellung der Ergebnisse wird in die Lagen-Verteilung (Abbildung 6.6) und die resultierenden Dicken (Abbildung 6.7) unterteilt. Bei näherer Betrachtung von Abbildung 6.7 fällt schnell auf, dass die Dicke von Platte 4 mit dem Parameter-Satz 4 etwa doppelt so hoch ist wie mit den anderen Parametern. Im Gegenzug ist Platte 1 ein wenig dünner verglichen mit den anderen Parametern. Die Platte 4 hat im 4. Fall bei der Lagenverteilung (Abbildung 6.6) einen höheren Anteil an 0° -Lagen als in den anderen Optimierungsfällen.

Parameter-Satz [-]	Dicke Platte 1 [mm]	Dicke Platte 2 [mm]	Dicke Platte 3 [mm]	Dicke Platte 4 [mm]	Dicke Platte 5 [mm]
1	100	100	100	100	100
2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
3	0.1	0.1	100	100	100
4	1	1	100	100	100
5	6.3	5.4	0.4	0.8	0.4

Tabelle 6.3.: Gewählte Variation der Startparameter am Kastenprofil

Parameter [-]	Iterationen [-]	Zeit [s]	Gewicht m^* [kg]
1	16	16	4.15
2	27	25	4.06
3	29	26	4.06
4	20	17	4.28
5	13	15	4.06

Tabelle 6.4.: Optimierung des Kastenprofils von verschiedenen Startpunkten (Iterationen, Gewicht)

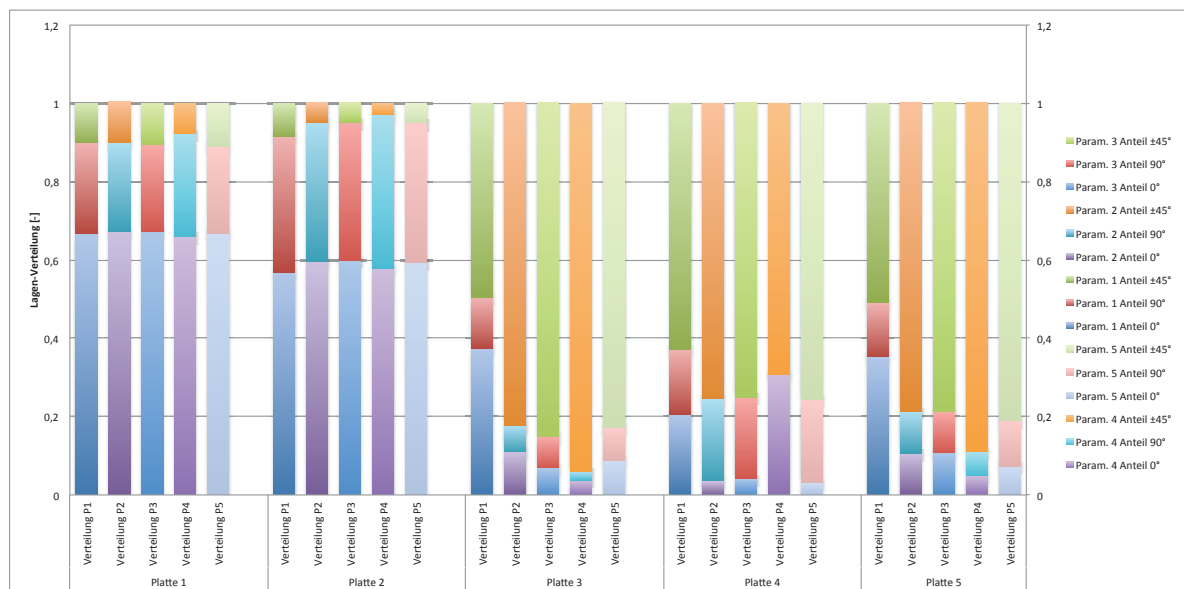


Abbildung 6.6.: Graphische Darstellung der Optimierungsergebnisse (Verteilung) mit Variation der Start-Dicken

Parameter [-]	Platten- Nr. [-]	Dicke t^* [mm]	α^* [-]	β^* [-]	γ^* [-]
1	1	6.291	0.669	0.23	0.1
	2	5.296	0.569	0.347	0.084
	3	0.598	0.375	0.129	0.497
	4	0.882	0.206	0.166	0.629
	5	0.59	0.353	0.138	0.51
2	1	6.328	0.673	0.227	0.104
	2	5.341	0.597	0.355	0.05
	3	0.401	0.112	0.065	0.825
	4	0.771	0.036	0.21	0.754
	5	0.412	0.107	0.106	0.79
3	1	6.314	0.672	0.223	0.104
	2	5.354	0.598	0.354	0.05
	3	0.393	0.069	0.079	0.854
	4	0.773	0.042	0.208	0.752
	5	0.407	0.108	0.105	0.789
4	1	5.993	0.659	0.264	0.078
	2	5.461	0.579	0.393	0.029
	3	0.654	0.038	0.022	0.939
	4	1.602	0.308	1E-4	0.692
	5	0.52	0.05	0.06	0.892
5	1	6.312	0.669	0.221	0.11
	2	5.381	0.593	0.357	0.05
	3	0.392	0.089	0.082	0.832
	4	0.767	0.033	0.212	0.756
	5	0.398	0.073	0.116	0.811

Tabelle 6.5.: Optimierung des Kastenprofils von verschiedenen Startpunkten (Dicken, Verteilungen)

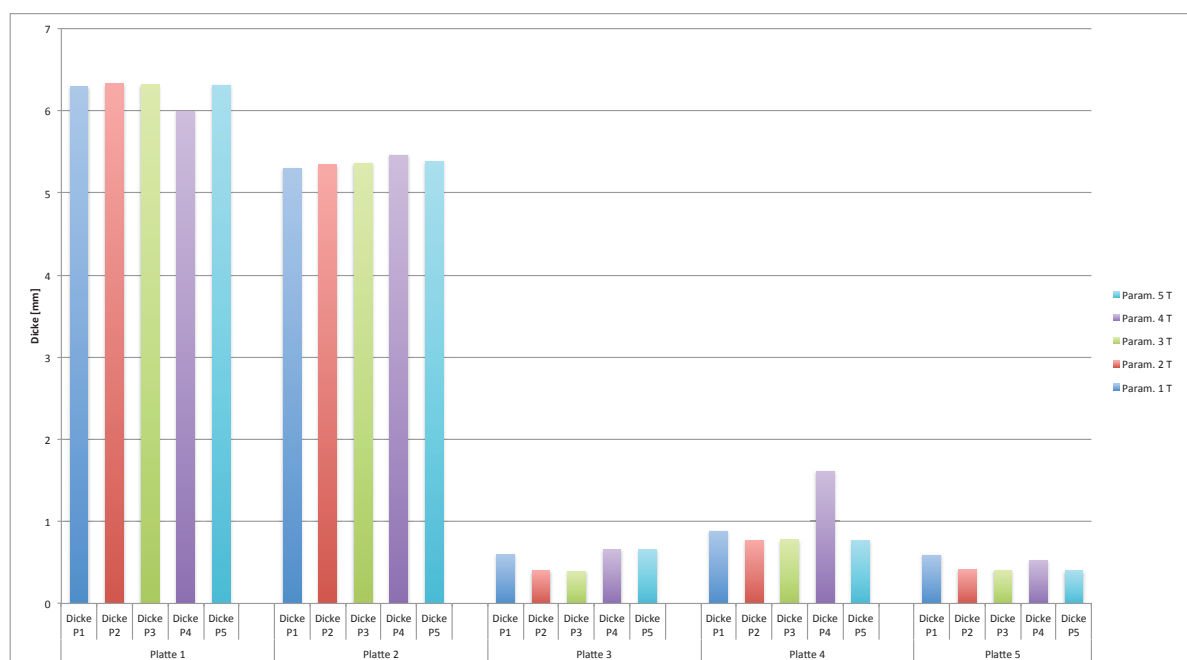


Abbildung 6.7.: Graphische Darstellung der Optimierungsergebnisse (Dicken) mit Variation der Start-Dicken

7. Vergleich der Ergebnisse mit HyperSizer

Die Ergebnisse der letzten Kapitel werden mit dem Programm HyperSizer verglichen. Dabei werden zuerst Untersuchungen am Balken und anschließend am Flügelkasten durchgeführt.

7.1. Vergleich am Balken

Lastfall	Parameter	Analytisch	Nastran MSCADS	HyperSizer
F_x	Dicke [mm]	0.4	0.399	0.41
	Verteilung [-]	$\alpha = 1$ $\beta, \gamma = 0$	$\alpha = 1$ $\beta, \gamma = 0$	$\alpha = 1$ $\beta, \gamma = 0$
M_x	Dicke [mm]	0.2354	0.2359	0.21
	Verteilung [-]	$\alpha, \beta = 0$ $\gamma = 1$	$\alpha, \beta = 0$ $\gamma = 1$	$\alpha, \beta = 0$ $\gamma = 1$
F_z	Dicke [mm]	1.51	1.509	1.33
	Verteilung [-]	$\alpha = 1$ $\beta, \gamma = 0$	$\alpha = 1$ $\beta, \gamma = 0$	$\alpha = 1$ $\beta, \gamma = 0$
F_x, M_x	Dicke [mm]	0.89	0.894	0.94
	Verteilung [-]	$\alpha, \gamma = 0.5$ $\beta = 0$	$\alpha = 0.495$ $\beta = 0$ $\gamma = 0.505$	$\alpha, \gamma = 0.5$ $\beta = 0$

Tabelle 7.1.: Vergleich der Ergebnisse am Balken aus Kapitel 4 mit HyperSizer

Im Falle von Normalspannung stimmen die Ergebnisse von HyperSizer gut mit den bisherigen überein. Sobald es sich jedoch um Biegung oder Torsion handelt, gibt es

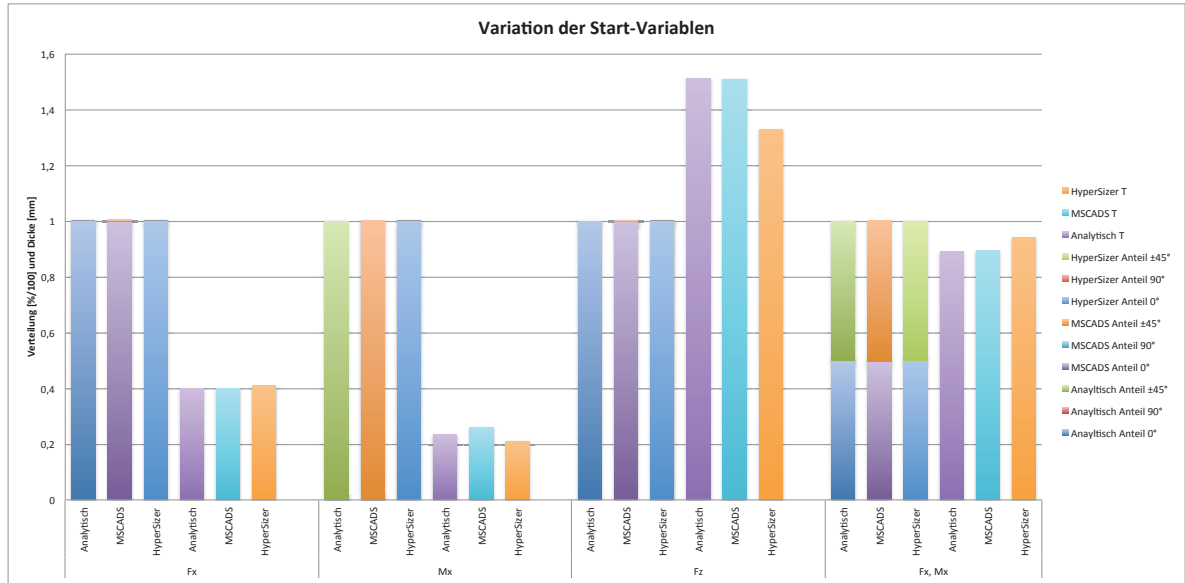


Abbildung 7.1.: Graphische Darstellung der Optimierungsergebnisse mit HyperSizer am Balken, verglichen mit denen aus Kapitel 4

Abweichungen gegenüber Nastran und der analytischen Lösung (siehe Tabelle 7.1 und Abbildung 7.1). Betrachtet man in Patran den Balken mit dem Belastungsfall reine Biegung F_z mit der Dicke 1.33 mm von HyperSizer, so ergibt sich eine maximale Spannung von $3220 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ (siehe Abbildung 7.2). Wird diese nun ins Verhältnis zu der maximalen Spannung in Faserrichtung aus den Materialdaten (Anhang B) gesetzt, erhält man einen Faktor $a_B = 0.776$ (Gleichung 7.1). Bei Vergleich dieses Wertes mit dem Gaußpunkt aus Tabelle 2.1 $GP_{3,1} = 0.775$ wird schnell klar, dass HyperSizer die Spannungen im Bauteil im Gaußpunkt betrachtet, während Nastran die Spannung am oberen oder unteren Rand $Z1$ oder $Z2$ (siehe Abschnitt 3.1) ausgibt. Bei Torsion lässt sich diese Feststellung bestätigen. Mit einer Dicke von $t = 0.21$ ergibt sich bei Torsion eine maximale Spannung in xy -Richtung von $1360 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ (siehe Abbildung 7.3). Damit errechnet sich ein Verhältnis von $a_T = 0.796$ (Gleichung 7.2), welches ebenfalls fast dem Gaußpunkt in Einheitskoordinaten entspricht. In dem Nastranskript können die Spannungen aus der Ebene $Z1$ mit dem Faktor a multipliziert werden. Somit ergibt sich bei reiner Biegung als Dicke ebenfalls $t_{F_z}^* = 1.33$ mm und bei Torsion $t_{M_x}^* = 0.21$ mm. Bei kombinierten Beanspruchungen ist dies nicht mehr möglich.

$$a_B = \frac{2500 \text{ Nmm}^2}{3220 \text{ mm}^2 \text{ N}} = 0.776 \quad (7.1)$$

$$a_T = \frac{1083 \text{ Nmm}^2}{1360 \text{ mm}^2\text{N}} = 0.796 \quad (7.2)$$

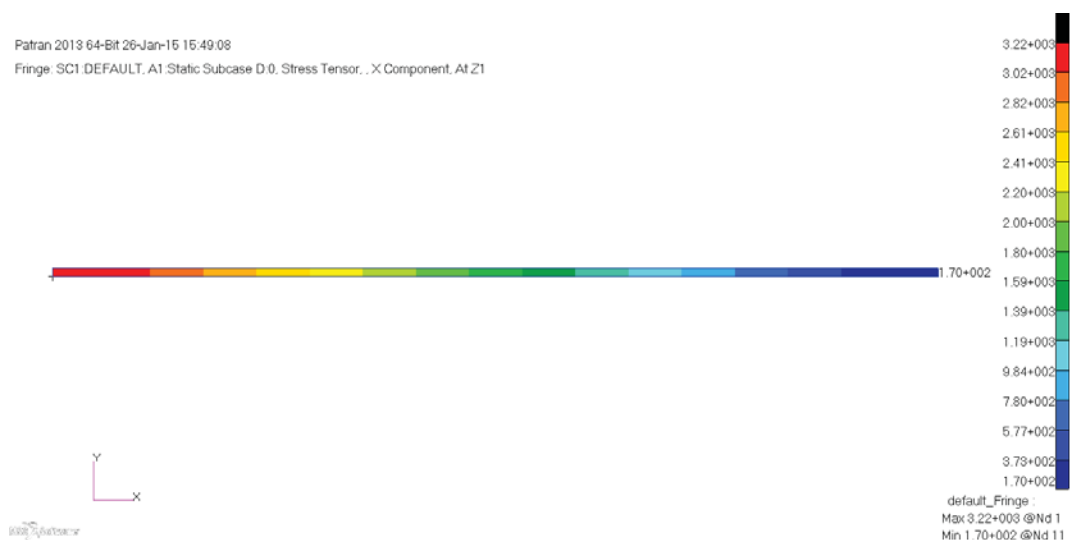


Abbildung 7.2.: Spannungsverlauf der x -Komponente am Balken unter Querkraft F_z
mit HyperSizer optimiert

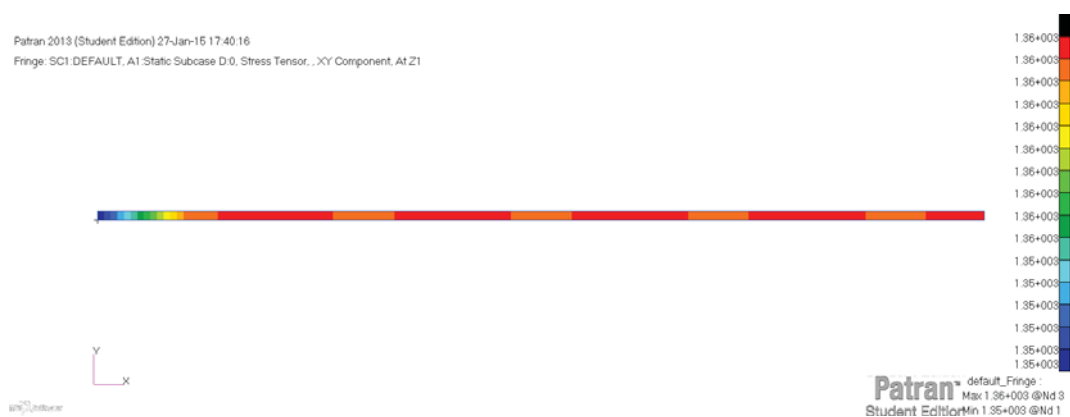


Abbildung 7.3.: Spannungsverlauf der xy -Komponente am Balken unter Torsionsmoment M_x mit HyperSizer optimiert

7.2. Vergleich am Kastenprofil

Die Optimierung am Kastenprofil wird ebenfalls mit HyperSizer durchgeführt und das Ergebnis zwischen HyperSizer und Nastran verglichen. Die Ergebnisse des Vergleichs werden einerseits in Tabelle 7.2 und andererseits als Säulendiagramm in Abbildung 7.4 graphisch dargestellt. Die verglichenen Dicken der Platten 3 und 4 sind fast identisch. Bei den Platten 1 und 5 gibt es leichte Abweichungen und besonders bei Platte 2 sind große Differenzen vorhanden. Unter Berücksichtigung der gewonnenen Erkenntnisse aus dem letzten Abschnitt 7.1 ist zu erwarten, dass die Ergebnisse der Optimierungen nicht genau übereinstimmen. Das Gesamtgewicht des Profils beträgt nach der HyperSizer-Optimierung 4.42 kg, dies entspricht etwa 110% des geringsten Gesamtgewichtes unter der Nastran-Optimierung. Die Spannungsverteilung im Kastenprofil (Abbildung 7.5 bis 7.7) ähnelt der Verteilung aus Kapitel 6. Die maximal auftretenden Spannungen waren in Kapitel 6 tendenziell höher, was bei einem geringeren Gesamtgewicht jedoch auch zu erwarten ist. Die höchsten Spannungen in x -Richtung liegen ebenfalls (wie in Kapitel 6) in den Platten 1 und 2 (Abbildung 7.5). Wegen der Auswertung der Spannungen an den Gaußpunkten sind auch in den Platten 1 und 2 die größten Abweichungen vorhanden. In den Platten 3 und 5 (Abbildung 7.7) liegen die größten Spannungen in xy -Richtung, hier sind auch kleine Differenzen zwischen Nastran und HyperSizer vorhanden. Allerdings kann ein Aufdicken einer Platte dazu führen, dass eine andere Platte weniger belastet wird. Es besteht eine Wechselwirkung zwischen den Dicken bzw. den dadurch auftretenden Spannungen der einzelnen Platten, weswegen einfache Aussagen wie beim Balken nicht mehr möglich sind.

Platten-Nr. [-]	Parameter	Nastran MSCADS	HyperSizer
1	Dicke [mm]	6.32	6.1
	Verteilung [-]	$\alpha = 0.67$ $\beta = 0,22$ $\gamma = 0.11$	$\alpha = 0.8$ $\beta = 0.2$ $\gamma = 0$
2	Dicke [mm]	5.4	6.7
	Verteilung [-]	$\alpha = 0.6$ $\beta = 0.36$ $\gamma = 0.04$	$\alpha = 0.8$ $\beta = 0.2$ $\gamma = 0$
3	Dicke [mm]	0.39	0.38
	Verteilung [-]	$\alpha = 0.08$ $\beta = 0.08$ $\gamma = 0.84$	$\alpha, \beta = 0$ $\gamma = 1$
4	Dicke [mm]	0.77	0.78
	Verteilung [-]	$\alpha = 0.03$ $\beta = 0.22$ $\gamma = 0.76$	$\alpha, \beta = 0$ $\gamma = 1$
5	Dicke [mm]	0.41	0.38
	Verteilung [-]	$\alpha = 0.07$ $\beta = 0.11$ $\gamma = 0.82$	$\alpha, \beta = 0$ $\gamma = 1$

Tabelle 7.2.: Vergleich der Ergebnisse am Kastenprofil aus Kapitel 6 mit HyperSizer

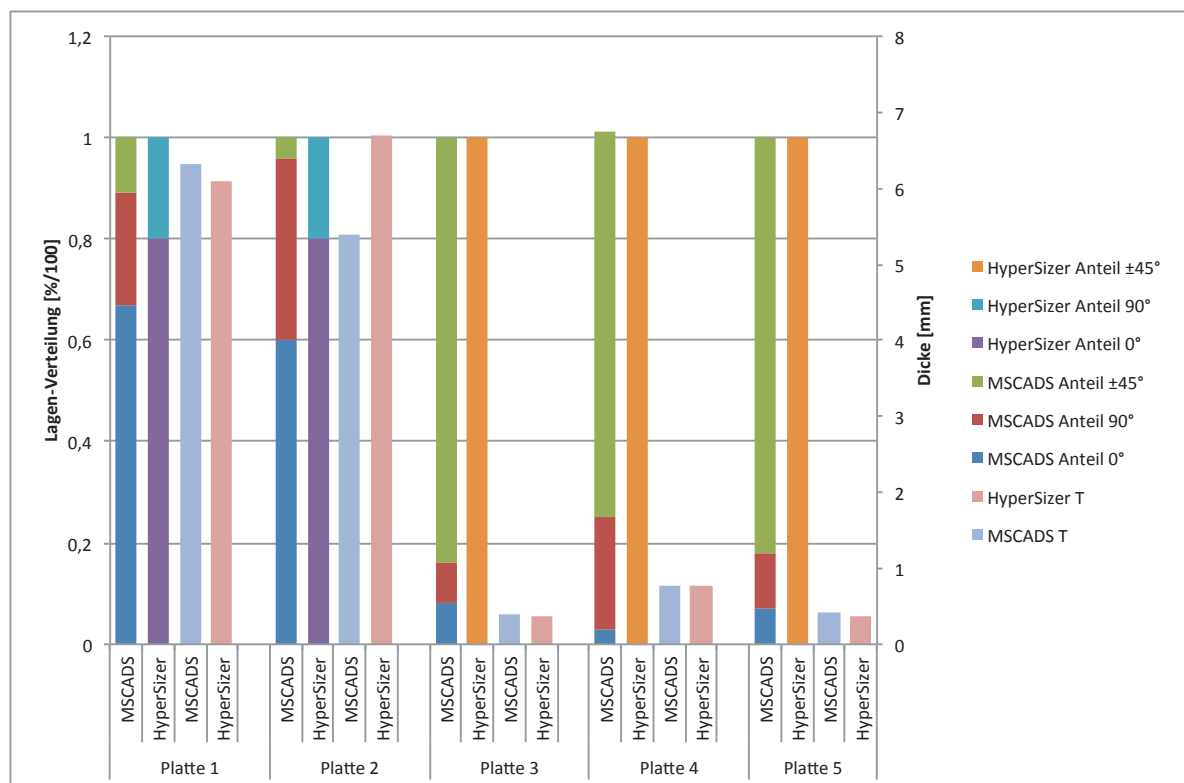


Abbildung 7.4.: Graphische Darstellung der Optimierungsergebnisse mit HyperSizer am Kastenprofil, verglichen mit denen aus Kapitel 6

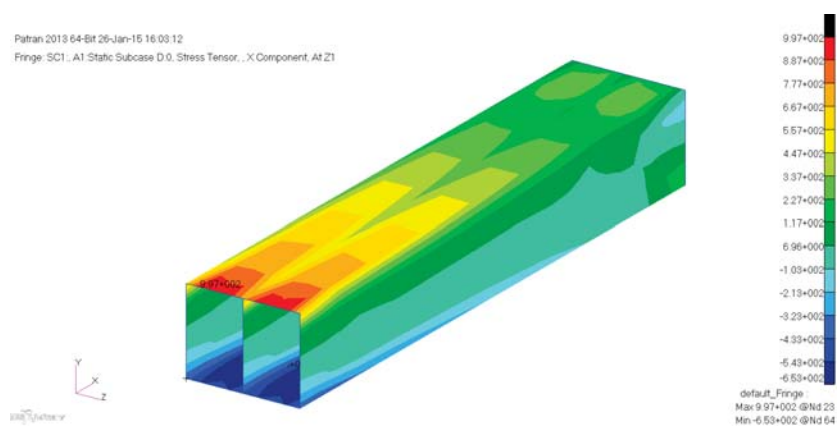


Abbildung 7.5.: Spannungsverlauf der x -Komponente am Kastenprofil mit HyperSizer-Optimierung

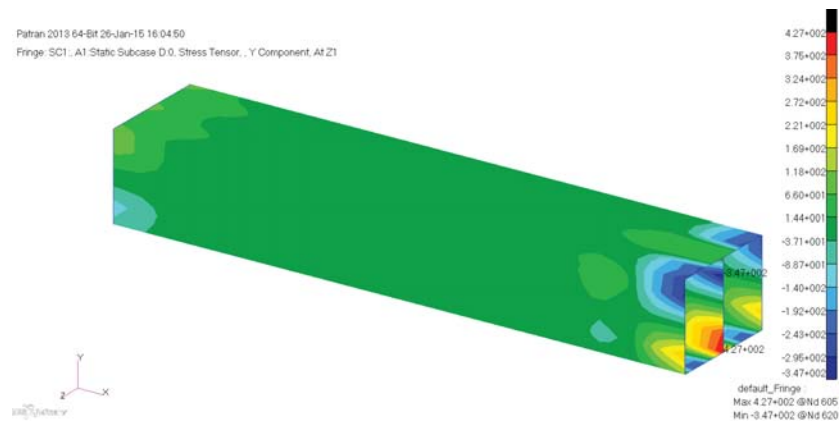


Abbildung 7.6.: Spannungsverlauf der y -Komponente am Kastenprofil mit HyperSizer-Optimierung

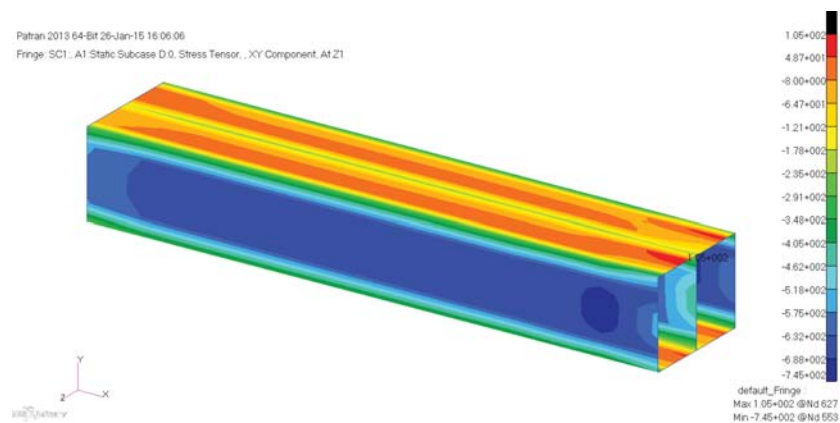


Abbildung 7.7.: Spannungsverlauf der xy -Komponente am Kastenprofil mit HyperSizer-Optimierung

8. Ausblick

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick auf mögliche weiterführende Arbeiten gegeben. Erste Untersuchungen werden an einem Kragbalken durchgeführt, da dieser eines der simpelsten Modelle darstellt. Die Ergebnisse lassen sich leicht auf Plausibilität prüfen und mit analytischen Lösungen vergleichen. Beim Balken kann außerdem der durch einen Belastungsfall hervorgerufene Spannungsverlauf im Bauteil gut vorhergesagt werden. Nach einer linear statischen Analyse wird versucht eine Optimierung am Balken in Nastran mit vorhandenen Methoden durchzuführen. Damit ist nur die Optimierung eines bereits festgelegten Lagenaufbaus (Stacking) möglich. Da dies jedoch nicht ausreicht, müssen die benötigten Methoden selbst entwickelt werden. Nastran bietet zwei verschiedene Optimierungsmethoden zur Auswahl, IPOPT und MSCADS. Am Balken wird der Einfluss des Verfahrens auf die Optimierung getestet. Beide Verfahren liefern selbst mit Variation der Startparameter Ergebnisse, welche beinahe mit der analytischen Lösung zusammenfallen. Lediglich mit dem IPOPT-Algorithmus führt eine der Variationen zu Abweichungen bei der Lagenverteilung und dadurch ändert sich die Dicke. Zudem benötigt das IPOPT-Verfahren in fast allen Fällen mehr Zeit als das MSCADS-Verfahren. Aus diesen Gründen wird im weiteren Verlauf die MSCADS-Optimierung verwendet. Eine Erweiterung auf Modelle mit mehr als einer Optimierungsregion wird auf Basis der am Balken durchgeführten Optimierung als Python-Skript entwickelt. Der nötige Aufwand zur Optimierung beliebig großer Modelle kann somit auf ein Minimum reduziert werden. Das Skript lässt sich direkt zur Optimierung eines Flügelkastens verwenden. An dem Kastenprofil wird ein Belastungsfall untersucht und anschließend werden die Startwerte erneut variiert. Die Optimierung am Flügelkasten verläuft erfolgreich und auch die Variation der Werte führt zu ähnlichen Ergebnissen.

Um die Ergebnisse miteinander zu vergleichen, werden die Optimierungen am Balken und am Kastenprofil mit HyperSizer durchgeführt. Beim Balken gibt es bereits Abweichungen zwischen HyperSizer und Nastran. Die Ursache dafür ist, dass beide Verfahren die Spannungen an unterschiedlichen Orten auswerten. Dementsprechend kommt es auch beim Kastenprofil zu Differenzen bei den Ergebnissen.

Die Grenzen der entwickelten Optimierung können anhand der untersuchten Modelle schlecht vorhergesagt werden. Hierzu sind komplexere geometrische Formen nötig, beispielsweise ein gesamter Flügel. Damit könnten die Ergebnisse und Erkenntnisse der Arbeit bestätigt werden. In der aktuellen Form ist keine Unterscheidung zwischen Zug- und Druckspannungen vorgesehen. Zur Verwendung in praxisrelevanter Umgebung ist diese Unterscheidung erforderlich. Dazu könnte die Berechnung der Sicherheitsfaktoren (Margins of Safety, MOS) in eine Unteroutine (Subroutine) ausgelagert werden. Subroutines werden in der Programmiersprache Fortran geschrieben. In diesen lassen sich Unterscheidungen (if-clauses) berücksichtigen. Durch die Auslagerung von möglichst vielen Teilen der Optimierung in UnterROUTINEN wird das Nastran-Skript übersichtlicher und kann für jede einzelne Optimierungsregion erneut ausgeführt werden. Änderungen lassen sich somit an nur einer Stelle im Skript (Subroutine) vornehmen. Je nach Fertigungsverfahren des Laminates gibt es bestimmte Randbedingungen, die eingehalten werden sollten bzw. müssen. So haben die einzelnen Lagen eine Mindestdicke, wodurch nur bestimmte Lagenverteilungen und Dicken zulässig sind. Diese Bedingungen könnten zum Teil bereits in der Optimierung berücksichtigt werden und andererseits in die Generierung von diskreten Laminaten aus den effektiven Laminaten einfließen. Zur Aufrechterhaltung der aerodynamischen Eigenschaften von geschlossenen Körpern kann beispielsweise am Kastenprofil die Zu- oder Abnahme der Dicken an den einzelnen Platten ausschließlich nach innen stattfinden, um somit die Außengeometrie zu erhalten. Dazu muss für jedes Element die Ausrichtung der Element-Normalen bekannt sein und anschließend kann von jedem einzelnen Element (*CQUAD*) die Mittelebene mit dem Offset (*ZOFFS*) um die halbe Element-Dicke verschoben werden.

A. Verwendete Software

Im Rahmen dieser Arbeit wurde folgende Software verwendet:

Name der Software	Entwickler	Versionsnummer
Microsoft Office	Microsoft	14.0 (2010)
Texnic Center	The TeXnicCenter Team	2.0
Notepad++	Notepad++ Team	6.6.9
eLamX	TU Dresden	2.2
Eclipse IDE	Eclipse Foundation	4.2
NASTRAN	MSC.Software	2013.1
PATRAN	MSC.Software	2013.0
Scilab	Scilab Enterprises	5.4.1

Tabelle A.1.: Im Rahmen der Arbeit verwendete Software

B. Verwendete Materialparameter

$E_1 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	$E_2 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	$G_{12} \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	ν_{12}	$S_1^T \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	$S_1^C \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	$S_2^T \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	$S_2^C \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$	$S_{12} \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$
157000	8500	4200	0,35	2500	-1400	75	-250	95

Tabelle B.1.: Material Eigenschaften für CFK [3]

C. Beispielrechnung CLT ABD-Matrix

Zur besseren Veranschaulichung wird eine Beispielaufgabe gerechnet. Als Material dient das Material aus Anhang B. Der Lagenaufbau ist in Gleichung C.1 sowie Abbildung C.1 dargestellt und die einzelnen Lagen haben eine Dicke von $t_k = 1$ mm. Dadurch ergeben sich die Abstände nach Gleichung C.2.

$$[45^\circ, 90^\circ, 0^\circ]t \quad (\text{C.1})$$

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{3}{2} \\ z_2 &= -\frac{1}{2} \\ z_3 &= +\frac{1}{2} \\ z_4 &= +\frac{3}{2} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Zuerst muss die Steifigkeitsmatrix \underline{C} (Gleichung 2.44) berechnet werden. Aufgrund der

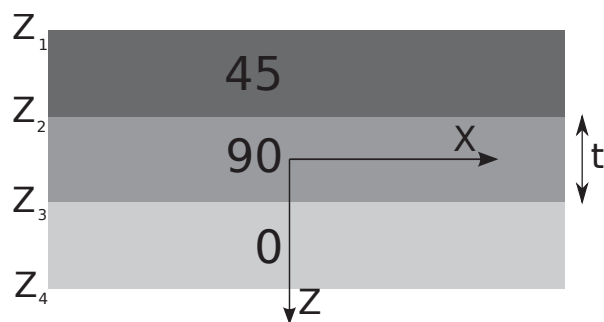


Abbildung C.1.: Stacking des unsymmetrischen Beispiels

Orthotropie ist:

$$\nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1} \quad (\text{C.3})$$

Somit ergeben sich die einzelnen Elemente von \underline{C} nach den Gleichungen C.4 bis C.7.

$$C_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}} = \frac{157000}{1 - 0.35^2 \frac{8500}{157000}} = 1.581 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (\text{C.4})$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{21} E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \dots = 2.995 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (\text{C.5})$$

$$C_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \dots = 8.557 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (\text{C.6})$$

$$C_{66} = G_{12} = \dots = 4.200 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (\text{C.7})$$

Die lokale Steifigkeitsmatrix ergibt sich für die 0° -Lage nach Gleichung 2.48 zu:

$$\underline{C}_{0^\circ} = \begin{pmatrix} 158.1 & 2.995 & 0 \\ 2.995 & 8.557 & 0 \\ 0 & 0 & 4.2 \end{pmatrix} 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (\text{C.8})$$

Mithilfe der Transformationsmatrix (Gleichung 2.45) lassen sich \underline{C}_{90° (Gleichung C.9) und \underline{C}_{45° (Gleichung C.10) berechnen.

$$\underline{C}_{90^\circ} = \begin{pmatrix} 8.557 & 2.995 & 0 \\ 2.995 & 158.1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.2 \end{pmatrix} 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (\text{C.9})$$

$$\underline{C}_{45^\circ} = \begin{pmatrix} 47.35 & 38.95 & 37.37 \\ 38.95 & 47.35 & 37.37 \\ 37.37 & 37.37 & 40.15 \end{pmatrix} 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (\text{C.10})$$

Im nächsten Schritt kann die \underline{ABD} -Matrix aufgestellt werden (siehe Gleichung 2.53). Anstatt der Abstände der Lagen z_k (C.2) lassen sich zur Berechnung des \underline{A} -Anteils auch

direkt die Dicken t_k (Gleichung C.11) verwenden.

$$\begin{aligned}
 \underline{A} &= \sum \underline{C}_k(z_k - z_{k-1}) = \sum \underline{C}_k(t_k) = t_k \cdot (\underline{C}_{0^\circ} + \underline{C}_{90^\circ} + \underline{C}_{45^\circ}) \\
 &= \underline{C}_{0^\circ} + \underline{C}_{90^\circ} + \underline{C}_{45^\circ} \\
 &= \begin{pmatrix} 213.96 & 44.94 & 37.37 \\ 44.94 & 213.96 & 37.37 \\ 37.37 & 37.37 & 48.55 \end{pmatrix} 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}
 \end{aligned} \tag{C.11}$$

Der B-Anteil berechnet sich über:

$$\begin{aligned}
 \underline{B} &= \frac{1}{2} \sum \underline{C}_k(z_k^2 - z_{k-1}^2) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\underline{C}_{0^\circ} \left[\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right] + \underline{C}_{90^\circ} \left[\frac{1^2}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \right] + \underline{C}_{45^\circ} \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^2 - \left(-\frac{3}{2} \right)^2 \right] \right) \\
 &= \frac{1}{2} (2\underline{C}_{0^\circ} - 2\underline{C}_{45^\circ}) = \underline{C}_{0^\circ} - \underline{C}_{45^\circ} \\
 &= \begin{pmatrix} 110.75 & -35.955 & -37.37 \\ -35.955 & -38.793 & -37.37 \\ -37.37 & -37.37 & -35.955 \end{pmatrix} 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}
 \end{aligned} \tag{C.12}$$

In Gleichung C.13 wird der \underline{D} -Anteil berechnet.

$$\begin{aligned}
 \underline{D} &= \frac{1}{3} \sum \underline{C}_k(z_k^3 - z_{k-1}^3) \\
 &= \frac{1}{3} \left\{ \underline{C}_{0^\circ} \left[\frac{3^3}{2} - \frac{1^3}{2} \right] + \underline{C}_{90^\circ} \left[\frac{1^3}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right)^3 \right] + \underline{C}_{45^\circ} \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^3 - \left(-\frac{3}{2} \right)^3 \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{26}{8} \underline{C}_{0^\circ} + \frac{2}{8} \underline{C}_{90^\circ} + \frac{26}{8} \underline{C}_{45^\circ} \right\} = \frac{13}{12} (\underline{C}_{0^\circ} + \underline{C}_{45^\circ}) + \frac{1}{12} \underline{C}_{90^\circ} \\
 &= \begin{pmatrix} 223.284 & 45.69 & 40.484 \\ 45.69 & 73.74 & 40.484 \\ 40.484 & 40.484 & 48.4 \end{pmatrix} 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

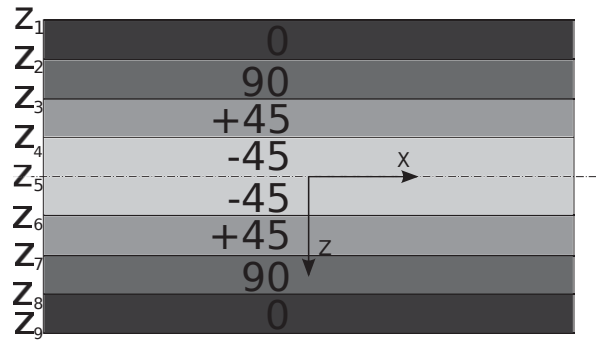


Abbildung C.2.: Stacking des symmetrischen Beispiels

Die ABD-Matrix setzt sich aus den Gleichungen C.11 bis C.13 zusammen zu Gleichung C.14.

$$\underline{ABD} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 213.96 & 44.94 & 37.37 & 110.75 & -35.955 & -37.37 \\ 44.94 & 213.96 & 37.37 & -35.955 & -38.793 & -37.37 \\ 37.37 & 37.37 & 48.55 & -37.37 & -37.37 & -35.955 \\ \hline 110.75 & -35.955 & -37.37 & 223.284 & 45.69 & 40.484 \\ -35.955 & -38.793 & -37.37 & 45.69 & 73.74 & 40.484 \\ -37.37 & -37.37 & -35.955 & 40.484 & 40.484 & 48.4 \end{array} \right) 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (\text{C.14})$$

Als nächstes Beispiel wird ein symmetrischer Lagenaufbau mit zusätzlichen -45° -Lagen (Steifigkeitsmatrix in Gleichung C.16) betrachtet. Das Stacking ist in Gleichung C.15 und Abbildung C.2 zu finden. Die Lagedicken werden mit je 1 mm nicht verändert.

$$[0^\circ, 90^\circ, 45^\circ, -45^\circ]_s \quad (\text{C.15})$$

$$\underline{C}_{-45^\circ} = \begin{pmatrix} 47.35 & 38.95 & -37.37 \\ 38.95 & 47.35 & -37.37 \\ -37.37 & -37.37 & 40.15 \end{pmatrix} 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (\text{C.16})$$

Die ABD-Matrix wird nach dem gleichen Schema gebildet. Aufgrund der Symmetrie werden die Elemente des B-Anteils zu Null (siehe Kapitel 2.3.4).

A-Matrix:

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \sum \underline{C}_k(z_k - z_{k-1}) = \sum \underline{C}_k(t_k) = 2t_k \cdot (\underline{C}_{0^\circ} + \underline{C}_{90^\circ} + \underline{C}_{45^\circ} + \underline{C}_{-45^\circ}) \\ &= 2(\underline{C}_{0^\circ} + \underline{C}_{90^\circ} + \underline{C}_{45^\circ} + \underline{C}_{-45^\circ}) \\ &= \begin{pmatrix} 522.714 & 167.78 & 0 \\ 167.78 & 522.714 & 0 \\ 0 & 0 & 177.4 \end{pmatrix} 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

D-Matrix:

$$\begin{aligned} \underline{D} &= \frac{1}{3} \sum \underline{C}_k(z_k^3 - z_{k-1}^3) \\ &= \frac{1}{3} \left(\underline{C}_{0^\circ}[4^3 - 3^3] + \underline{C}_{90^\circ}[3^3 - 2^3] + \underline{C}_{45^\circ}[2^3 - 1^3] + \underline{C}_{-45^\circ}[1^3 - 0^3] \right. \\ &\quad + \underline{C}_{-45^\circ}[0^3 - (-1)^3] + \underline{C}_{45^\circ}[(-1)^3 - (-2)^3] \\ &\quad \left. + \underline{C}_{90^\circ}[(-2)^3 - (-3)^3] + \underline{C}_{0^\circ}[(-3)^3 - (-4)^3] \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\underline{C}_{0^\circ} 2[4^3 - 3^3] + \underline{C}_{90^\circ} 2[3^3 - 2^3] + \underline{C}_{45^\circ} 2[2^3 - 1^3] + \underline{C}_{-45^\circ} 2[1^3 - 0^3] \right) \quad (\text{C.18}) \\ &= \frac{2}{3} \left(37\underline{C}_{0^\circ} + 19\underline{C}_{90^\circ} + 7\underline{C}_{45^\circ} + \underline{C}_{-45^\circ} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 4260.7 & 319.5 & 149.5 \\ 319.5 & 2466.2 & 149.5 \\ 149.5 & 149.5 & 370.9 \end{pmatrix} 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{aligned}$$

Die gesamte ABD-Matrix ergibt sich aus Gleichung C.17 und C.18 zu:

$$\underline{ABD} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 522.714 & 167.78 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 167.78 & 522.714 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 177.4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4260.7 & 319.5 & 149.5 \\ 0 & 0 & 0 & 319.5 & 2466.2 & 149.5 \\ 0 & 0 & 0 & 149.5 & 149.5 & 370.9 \end{array} \right) 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (\text{C.19})$$

Nach Gleichung 2.54 können die Anteile der ABD-Matrix auch dickennormiert werden. Die Gesamtdicke t beträgt 8 mm. Die normierte Matrix ist in Gleichung C.20 dargestellt.

$$\underline{ABD}_n = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 65.339 & 20.973 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20.973 & 65.339 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22.175 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 99.86 & 7.49 & 3.50 \\ 0 & 0 & 0 & 7.49 & 57.80 & 3.50 \\ 0 & 0 & 0 & 3.50 & 3.50 & 8.69 \end{array} \right) 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (\text{C.20})$$

D. Beispielrechnung CLT ABD-Matrix verschmiert

Anhand dieses Beispiels soll die Berechnung von verschmierten Laminaten verdeutlicht werden. In diesem Fall kann nicht mehr von einem Stacking gesprochen werden, sondern nur noch von einer prozentualen Lagenverteilung (Gleichung D.1). Diese bleibt aber wie in dem symmetrischen Beispiel in Anhang C bestehen. Das Laminat hat wieder eine Gesamtdicke von 8 mm.

$$\begin{aligned}
 0^\circ &: 25\% \\
 90^\circ &: 25\% \\
 45^\circ &: 25\% \\
 -45^\circ &: 25\%
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

Da dieselben Lagenanteile im Laminat vorhanden sind, erfolgt die Berechnung des \underline{A} -Anteils wie im vorherigen Beispiel (Gleichung C.17). Lediglich die Verteilung der einzelnen Lagen ist ungewiss. Der \underline{A} -Anteil ändert sich also nicht bei einem Wechsel von diskreten auf effektive Lamine (Gleichung D.2).

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 522.714 & 167.78 & 0 \\ 167.78 & 522.714 & 0 \\ 0 & 0 & 177.4 \end{pmatrix} 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \tag{D.2}$$

Für die Berechnung des \underline{D} -Anteils können nicht mehr die Abstände der einzelnen Schichten betrachtet werden, sondern nur noch das gesamte Laminat.

$$\begin{aligned}
\underline{D} &= \frac{1}{3} \sum \underline{C}_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \\
&= \frac{1}{3} \left([4^3 - (-4)^3] \left(\frac{1}{4} \underline{C}_{0^\circ} + \frac{1}{4} \underline{C}_{90^\circ} + \frac{1}{4} \underline{C}_{45^\circ} + \frac{1}{4} \underline{C}_{-45^\circ} \right) \right) \\
&= \frac{1}{12} \left([64 + 64] (\underline{C}_{0^\circ} + \underline{C}_{90^\circ} + \underline{C}_{45^\circ} + \underline{C}_{-45^\circ}) \right) \\
&= \frac{32}{3} (\underline{C}_{0^\circ} + \underline{C}_{90^\circ} + \underline{C}_{45^\circ} + \underline{C}_{-45^\circ}) \tag{D.3} \\
&= \begin{pmatrix} 2787.8 & 894.8 & 0 \\ 894.8 & 2787.8 & 0 \\ 0 & 0 & 946.1 \end{pmatrix} 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}
\end{aligned}$$

Die ABD-Matrix für das verschmierte Laminat:

$$\underline{ABD} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 522.714 & 167.78 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 167.78 & 522.714 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 177.4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2787.8 & 894.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 894.8 & 2787.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 946.1 \end{array} \right) 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \tag{D.4}$$

Für die dickennormierte ABD-Matrix ergibt sich:

$$\underline{ABD}_n = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 65.339 & 20.973 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20.973 & 65.339 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22.175 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 65.339 & 20.973 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20.973 & 65.339 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22.175 \end{array} \right) 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \tag{D.5}$$

An diesem Beispiel wird die Berechnung der zulässigen Spannung im Bauteil aus Unterkapitel 3.3 teilweise vorgeführt. Mit Gleichung 3.4 kann die jeweils im Bauteil unter der Testspannung auftretende Spannung (D.7) berechnet werden. Die Rechnung wird für die Orientierungen 0° und 90° in der x -Richtung durchgeführt, die anderen lassen sich analog bestimmen.

Für die 0° -Lagen wird die Steifigkeitsmatrix \underline{C}_0 aus Gleichung C.8 und die dicken-normierte Matrix \underline{A}_n benötigt. Zur Berechnung der Spannung in x -Richtung wird die Testspannung nach Gleichung D.6 gewählt.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{lok,0} &= \underline{T}_0 \cdot \underline{C}_0 \cdot \underline{A}_n^{-1} \cdot \vec{n} \\ &= \underline{I} \begin{pmatrix} 158.1 & 2.995 & 0 \\ 2.995 & 8.557 & 0 \\ 0 & 0 & 4.2 \end{pmatrix} 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \begin{pmatrix} 1.706 & -0.548 & 0 \\ -0.548 & 1.706 & 0 \\ 0 & 0 & 4.51 \end{pmatrix} 10^{-5} \frac{\text{mm}^2}{\text{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ &= \begin{pmatrix} 2.681 \\ 0.004 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Die Spannung aus Gleichung D.7 muss noch ins Verhältnis zu den jeweils zulässigen Materialspannungen gebracht werden.

$$\sigma_{allow.0,x} = \left| \frac{S_1^T}{\sigma_{lok.0,x}} \right| = \left| \frac{2500 \frac{\text{Nmm}^2}{\text{mm}^2}}{2.681 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} \right| = 932.4 \quad (\text{D.8})$$

$$\sigma_{allow.0,y} = \left| \frac{S_2^T}{\sigma_{lok.0,y}} \right| = \left| \frac{75 \frac{\text{Nmm}^2}{\text{mm}^2}}{0.004 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}} \right| = 18750 \quad (\text{D.9})$$

Die in Gleichung D.8 und D.9 errechneten MOS entsprechen den im Laminat, mit der in Gleichung D.1 angegebenen Lagenverteilung, zulässigen Spannungen in x -Richtung für die 0° -Lage. Von Interesse ist dabei die geringste MOS.

Für die 90° -Lage ergibt sich die Rechnung nach Gleichung D.10.

$$\begin{aligned}
 \vec{\sigma}_{lok,90} &= \underline{T}_{90} \cdot \underline{C}_{90} \cdot \underline{A}_n^{-1} \cdot \vec{n} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8.557 & 2.995 & 0 \\ 2.995 & 158.1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.2 \end{pmatrix} 10^3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\
 &\quad \cdot \begin{pmatrix} 1.706 & -0.548 & 0 \\ -0.548 & 1.706 & 0 \\ 0 & 0 & 4.51 \end{pmatrix} 10^{-5} \frac{\text{mm}^2}{\text{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (\text{D.10}) \\
 &= \begin{pmatrix} -0.8314 \\ 0.13 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}
 \end{aligned}$$

Die zulässigen Spannungen in der 90° -Lage sind in Gleichung D.11 und D.12 dargestellt. Da keine Unterscheidung zwischen Zug und Druck stattfindet, kann einfach der Betrag des Ergebnisses verwendet werden.

$$\sigma_{allow.90,x} = \left| \frac{S_1^T}{\sigma_{lok.90,x}} \right| = \left| \frac{2500 \frac{\text{Nmm}^2}{\text{mm}^2\text{N}}}{-0.8314 \text{ mm}^2\text{N}} \right| = 3007 \quad (\text{D.11})$$

$$\sigma_{allow.90,y} = \left| \frac{S_2^T}{\sigma_{lok.90,y}} \right| = \left| \frac{75 \frac{\text{Nmm}^2}{\text{mm}^2\text{N}}}{0.13 \text{ mm}^2\text{N}} \right| = 576,9 \quad (\text{D.12})$$

Für die $\pm 45^\circ$ -Lagen ergibt sich die minimale zulässige Spannung zu $\tau_{allow,\pm 45,xy} = 1003$. Die für eine weitere Berechnung relevante Spannung in x -Richtung ist also $\sigma_{allow.90,y}$ (Gleichung D.12). Für die y - und xy -Richtung verläuft die Berechnung der zulässigen Spannungen nach dem gleichen Schema.

E. Inputdatei NASTRAN SOL101

```

1  SOL 101
2  CEND
3  TITLE = MSC.Nastran job created on 20-Nov-14 at 13:49:43
4  ECHO = NONE
5  SUBCASE 1
6  SUBTITLE = Default
7  SPC = 2
8  LOAD = 2
9  DISPLACEMENT (SORT1, REAL) = ALL
10 SPCFORCES (SORT1, REAL) = ALL
11 STRESS (SORT1, REAL, VONMISES, BILIN) = ALL
12 BEGIN BULK
13 PARAM POST 0
14 PARAM PRTMAXIM YES
15
16 $Knoten ID X Y Z
17 GRID 1 0 0 0
18 GRID 2 50 0 0
19 GRID 3 100 0 0
20 GRID 4 0 1 0
21 GRID 5 50 1 0
22 GRID 6 100 1 0
23 $Elem ID PROP-ID P1 P2 P3 P4 angle
24 CQUAD4 1 1 1 2 5 4 0
25 CQUAD4 2 1 2 3 6 5 0
26 $Shell ID MAT-ID1 T MAT-ID2 MAT-ID3
27 PSHELL 1 11 1 11
28 $ ID C11 C12 C13 C22 C23 C33 RHO
29 MAT2 11 1.581+5 2.995+3 0.0 8.557+3 0.0 4.2+3 1.58-6
30
31 $Festhaltungen und Kraefte
32 $SPC ID festh P-ID P-ID
33 SPC1 1 123456 1 4
34 SPCADD 2 1
35 $Kraft ID P-ID coord F x y z
36 FORCE 1 3 0 100 1 0 0
37 FORCE 1 6 0 100 1 0 0
38 LOAD 2 1 1 1
39 ENDDATA 07cebdef

```

F. Inputdatei NASTRAN SOL200

```

1  SOL 200
2
3  CEND
4
5  TITLE = MSC.Nastran job created on 13-Oct-14 at 10:06:06
6  ECHO = NONE
7  $Statische Analyse
8  ANALYSIS=STATIC
9  $Minimierung des Objekts mit ID 501
10 DESOBJ (MIN) =501
11 $Design Subcase ID
12 DESSUB=401
13
14 SUBCASE 1
15   SUBTITLE=Default
16   SPC = 2
17   LOAD = 2
18   DISPLACEMENT (SORT1,REAL) =ALL
19   STRESS (SORT1,REAL,VONMISES) =ALL
20 BEGIN BULK
21 $——>ID——>A_mat——>T——>D_mat——>——>Ts/T NSM
22 PSHELL——>123——>1001——>4.0——>1001——>——>1.0——>0.0
23
24 $Elemente
25 CQUAD4 1 123 1 2 13 12 0.
26 CQUAD4 2 123 2 3 14 13 0.
27 CQUAD4 3 123 3 4 15 14 0.
28 CQUAD4 4 123 4 5 16 15 0.
29 CQUAD4 5 123 5 6 17 16 0.
30 CQUAD4 6 123 6 7 18 17 0.
31 CQUAD4 7 123 7 8 19 18 0.
32 CQUAD4 8 123 8 9 20 19 0.
33 CQUAD4 9 123 9 10 21 20 0.
34 CQUAD4 10 123 10 11 22 21 0.
35
36 $——>——>LABEL——>VALUE
37 DTABLE——>C011——>1.581+5——>C022——>8.557+3——>C012——>2.995+3——>C033——>
4.2+3
38 DTABLE——>C9011——>8.557+3——>C9022——>1.581+5——>C9012——>2.995+3——>C9033——>
4.2+3

```



```

39  DTABLE→C4511→47.35+3>C4522→47.35+3>C4512→38.95+3>C4533→
    40.15+3
40  DTABLE,C4513,-37.37+3,C4523,-37.37+3
41
42  DTABLE,S1T,2.5+3,S1C,1.4+3,S2T,75.,S2C,250.,S12,95.
43
44  $→→ID→→G11→→G12→→G13>G22→→G23>G33→→RHO
45  MAT2→1001→1.581+5>2.995+3>0.0>8.557+3>0.0>4.2+3→1.58-6
46
47  $Knoten
48  GRID.....1.....0.....0.....0.
49  GRID.....2.....10.....0.....0.
50  GRID.....3.....20.....0.....0.
51  GRID.....4.....30.....0.....0.
52  GRID*.....5.....39.9999961853027+0.
53  *.....0.
54  GRID*.....6.....49.9999961853027+0.
55  *.....0.
56  GRID.....7.....60.....0.....0.
57  GRID.....8.....70.....0.....0.
58  GRID.....9.....80.....0.....0.
59  GRID.....10.....90.....0.....0.
60  GRID.....11.....100.....0.....0.
61  GRID.....12.....0.....1.....0.
62  GRID.....13.....10.....1.....0.
63  GRID.....14.....20.....1.....0.
64  GRID.....15.....30.....1.....0.
65  GRID*.....16.....39.99999618530271.
66  *.....0.
67  GRID*.....17.....49.99999618530271.
68  *.....0.
69  GRID.....18.....60.....1.....0.
70  GRID.....19.....70.....1.....0.
71  GRID.....20.....80.....1.....0.
72  GRID.....21.....90.....1.....0.
73  GRID.....22.....100.....1.....0.
74  $Festhaltungen und Kraefte
75  SPC1.....1.....123456.....1.....12
76  SPCADD.....2.....1
77

```

```

78  FORCE→1→11→0→1.e+3→1.→0.→0.
79  FORCE→1→22→0→1.e+3→1.→0.→0.
80  LOAD.....2.....1.....1.....1
81
82  $DES... ,ID,Label,Start,min,max
83  DESVAR,1,T,2.,1e-6
84
85  DESVAR,11,alp,.3,1.e-4,1.
86  DESVAR,12,bet,.3,1.e-4,1.
87  DESVAR,13,gam,.3,1.e-4,1.
88
89  DVMREL2,101,MAT2,1001,G11,,,201
90  ,DESVAR,11,12,13
91  ,DTABLE,C011,C9011,C4511
92
93  $Verhaeltnis zwischen Material und Variablen herstellen
94  DVMREL2→102→MAT2→1001→G12→→→202
95  →DESVAR→11→12→13
96  →DTABLE→C012→C9012→C4512
97
98  DVMREL2→103→MAT2→1001→G22→→→203
99  →DESVAR→11→12→13
100 →DTABLE→C022→C9022→C4522
101
102 DVMREL2→104→MAT2→1001→G33→→→204
103 →DESVAR→11→12→13
104 →DTABLE→C033→C9033→C4533
105
106 $Gesamtsteifigkeit berechnen
107 DEQATN→201→C11g(alp,bet,gam,C011,C9011,C4511)=
108 →alp*C011+bet*C9011+gam*C4511;
109
110 DEQATN→202→C12g(alp,bet,gam,C012,C9012,C4512)=
111 →alp*C012+bet*C9012+gam*C4512;
112
113 DEQATN→203→C22g(alp,bet,gam,C022,C9022,C4522)=
114 →alp*C022+bet*C9022+gam*C4522;
115
116 DEQATN→204→C33g(alp,bet,gam,C033,C9033,C4533)=
117 →alp*C033+bet*C9033+gam*C4533;

```

```
118
119 $Nenner 1x Berechnen, wiederholt sich oft
120 DRESP2→10000→nenner→20000
121 →DVMREL2→101→103→102
122
123 DEQATN→20000→fnenner (G11,G22,G12) =
124 →G11*G22-G12**2;
125
126 $Berechnung der effektiven Sxx
127 DRESP2→10001→MOSx0x→20001
128 →DESVAR→11
129 →DTABLE→S1T→C011→C012
130 →DVMREL2→102→103
131 →DRESP2→10000
132
133 DRESP2→10002→MOSx0y→20002
134 →DESVAR→11
135 →DTABLE→S2T→C012→C022
136 →DVMREL2→102→103
137 →DRESP2→10000
138
139 DRESP2→10003→MOSx90x→20003
140 →DESVAR→12
141 →DTABLE→S1T→C9012→C9022
142 →DVMREL2→102→103
143 →DRESP2→10000
144
145 DRESP2→10004→MOSx90y→20004
146 →DESVAR→12
147 →DTABLE→S2T→C9011→C9012
148 →DVMREL2→102→103
149 →DRESP2→10000
150
151 DRESP2→10005→MOSx45x→20005
152 →DESVAR→13
153 →DTABLE→S1T→C4511→C4512→c4513→c4523
154 →DVMREL2→102→103
155 →DRESP2→10000
156
157 DRESP2→10006→MOSx45y→20006
```

```

158   —→DESVAR→13
159   —→DTABLE→S2T→C4511→C4512→c4513→c4523
160   —→DVMREL2→102→103
161   —→DRESP2→10000
162
163   DRESP2→10007→MSx45xy→20007
164   —→DESVAR→13
165   —→DTABLE→S12→C4511→C4512
166   —→DVMREL2→102→103
167   —→DRESP2→10000
168
169   DRESP2→10009→Sx→20009
170   —→DRESP1→1
171   —→DRESP2→10001→10002→10003→10004→10005→10006→10007
172
173   DEQATN→20001→MOSfx0x(alp,S1T,C011,C012,G12,G22,nenner) =
174   —→(S1T*(max(1.e-3,alp)/alp))/
175   —→abs((C011*G22-C012*G12)/nenner);
176
177   DEQATN→20002→MOSfx0y(alp,S2T,C012,C022,G12,G22,nenner) =
178   —→(S2T*(max(1.e-3,alp)/alp))/
179   —→abs((C012*G22-C022*G12)/nenner);
180
181   DEQATN→20003→MOSfx90x(bet,S1T,C9012,C9022,G12,G22,nenner) =
182   —→(S1T*(max(1.e-3,bet)/bet))/
183   —→abs((C9012*G22-C9022*G12)/nenner);
184
185   DEQATN→20004→MOSfx90y(bet,S2T,C9011,C9012,G12,G22,nenner) =
186   —→(S2T*(max(1.e-3,bet)/bet))/
187   —→abs((C9011*G22-C9012*G12)/nenner);
188
189   DEQATN→20005→Mfx45x(gam,S1T,C4511,C4512,C4513,C4523,
190   —→G12,G22,nenner) =
191   —→(S1T*(max(1.e-3,gam)/gam))/
192   —→abs((G22*(0.5*(C4511+c4512)-c4513)
193   —→-G12*(0.5*(C4512+c4511)-c4523))/nenner);
194
195   DEQATN→20006→Mfx45y(gam,S2T,C4511,C4512,C4513,C4523,
196   —→G12,G22,nenner) =
197   —→(S2T*(max(1.e-3,gam)/gam))/

```

```

198   —>abs ( (G22*(0.5*(C4511+c4512)+c4513)
199   —>-G12*(0.5*(C4512+c4511)+c4523))/nenner) ;
200
201   DEQATN->20007->Mfx45xy (gam,S12,C4511,C4512,
202   —>G12,G22,nenner) =
203   —>(S12*(max(1.e-3,gam)/gam))/
204   —>abs ( (G22*(0.5*(C4511-c4512))
205   —>-G12*(0.5*(C4512-c4511)))/nenner) ;
206
207   DEQATN->20009->Sfx (normX,MOSx0x,MOSx0y,MOSx90x,MOSx90y,
208   —>MOSx45x,MOSx45y,MSx45xy) =
209   —>abs (normX)/min (MOSx0x,MOSx0y,MOSx90x,MOSx90y,
210   —>MOSx45x,MOSx45y,MSx45xy) ;
211
212   $Berechnung der effekt. Syy
213   DRESP2->10011->MOSy0x->20011
214   —>DESVAR->11
215   —>DTABLE->S1T->C011->C012
216   —>DVMREL2->101->102
217   —>DRESP2->10000
218
219   DRESP2->10012->MOSy0y->20012
220   —>DESVAR->11
221   —>DTABLE->S2T->C012->C022
222   —>DVMREL2->101->102
223   —>DRESP2->10000
224
225   DRESP2->10013->MOSy90x->20013
226   —>DESVAR->12
227   —>DTABLE->S1T->C9012->C9022
228   —>DVMREL2->101->102
229   —>DRESP2->10000
230
231   DRESP2->10014->MOSy90y->20014
232   —>DESVAR->12
233   —>DTABLE->S2T->C9011->C9012
234   —>DVMREL2->101->102
235   —>DRESP2->10000
236
237   DRESP2->10015->MSy45x->20015

```

```

238  —→DESVAR→13
239  —→DTABLE→S1T→C4511→C4512→c4513→c4523
240  —→DVMREL2→101→102
241  —→DRESP2→10000
242
243  DRESP2→10016→MSy45y→20016
244  —→DESVAR→13
245  —→DTABLE→S2T→C4511→C4512→c4513→c4523
246  —→DVMREL2→101→102
247  —→DRESP2→10000
248
249  DRESP2→10017→MSy45xy→20017
250  —→DESVAR→13
251  —→DTABLE→S12→C4511→C4512
252  —→DVMREL2→101→102
253  —→DRESP2→10000
254
255  DRESP2→10019→Sy→20019
256  —→DRESP1→2
257  —→DRESP2→10011→10012→10013→10014→10015→10016→10017
258
259  DEQATN→20011→MOSfy0x(alp,S1T,C011,C012,G11,G12,nenner) =
260  —→(S1T*(max(1.e-3,alp)/alp)) /
261  —→abs((C012*G11-C011*G12)/nenner);
262
263  DEQATN→20012→MOSfy0y(alp,S2T,C012,C022,G11,G12,nenner) =
264  —→(S2T*(max(1.e-3,alp)/alp)) /
265  —→abs((C022*G11-C012*G12)/nenner);
266
267  DEQATN→20013→MOSfy90x(bet,S1T,C9012,C9022,G11,G12,nenner) =
268  —→(S1T*(max(1.e-3,bet)/bet)) /
269  —→abs((C9022*G11-C9012*G12)/nenner);
270
271  DEQATN→20014→MOSfy90y(bet,S2T,C9011,C9012,G11,G12,nenner) =
272  —→(S2T*(max(1.e-3,bet)/bet)) /
273  —→abs((C9012*G11-C9011*G12)/nenner);
274
275  DEQATN→20015→Mfy45x(gam,S1T,C4511,C4512,C4513,C4523,
276  —→G11,G12,nenner) =
277  —→(S1T*(max(1.e-3,gam)/gam)) /

```

```

278   —>abs ( (-G12* (0.5* (C4511+c4512) -c4513)
279   —>+G11* (0.5* (C4512+c4511) -c4523)) /nenner) ;
280
281   DEQATN->20016->Mfy45y (gam,S2T,C4511,C4512,C4513,C4523,
282   —>G11,G12,nenner) =
283   —>(S2T*(max(1.e-3,gam)/gam)) /
284   —>abs ( (-G12* (0.5* (C4511+c4512) +c4513)
285   —>+G11* (0.5* (C4512+c4511) +c4523)) /nenner) ;
286
287   DEQATN->20017->Mfy45xy (gam,S12,C4511,C4512,
288   —>G11,G12,nenner) =
289   —>(S12*(max(1.e-3,gam)/gam)) /
290   —>abs ( (-G12* (0.5* (C4511-c4512))
291   —>+G11* (0.5* (C4512-c4511))) /nenner) ;
292
293   DEQATN->20019->Sfy (normY,MOSy0x,MOSy0y,MOSy90x,MOSy90y,
294   —>Mfy45x,Mfy45y,Mfy45xy) =
295   —>abs (normY) /min (MOSy0x,MOSy0y,MOSy90x,MOSy90y
296   —>,Mfy45x,Mfy45y,Mfy45xy) ;
297
298   $Berechnung der effekt. Sxy
299   DRESP2->10021->MOSxy0->20021
300   —>DESVAR->11
301   —>DTABLE->S12>C033
302   —>DVMREL2>104
303
304   DRESP2->10022->MOSxy90>20022
305   —>DESVAR->12
306   —>DTABLE->S12>C033
307   —>DVMREL2>104
308
309   DRESP2->10025->MSxy45x>20025
310   —>DESVAR->13
311   —>DTABLE->S1T>c4513->c4523->c4533
312   —>DVMREL2>104
313
314   DRESP2->10026->MSxy45y>20026
315   —>DESVAR->13
316   —>DTABLE->S2T>c4513->c4523->c4533
317   —>DVMREL2>104

```

```

318
319 DRESP2→10029→Sxy→20029
320 →DRESP1→3
321 →DRESP2→10021→10022→10025→10026
322
323 DEQATN→20021→MSfxy0(alp,S12,C033,G33)=
324 →(S12*(max(1.e-3,alp)/alp))/
325 →abs(C033/G33);
326
327 DEQATN→20022→MSfxy90(bet,S12,C033,G33)=
328 →(S12*(max(1.e-3,bet)/bet))/
329 →abs(C033/G33);
330
331 DEQATN→20025→Mfxy45x(gam,S1T,C4513,C4523,C4533,
332 →G33)=
333 →(S1T*(max(1.e-3,gam)/gam))/
334 →abs((1./G33)*(0.5*(C4513+c4523)-c4533));
335
336 DEQATN→20026→Mfxy45y(gam,S2T,C4513,C4523,C4533,
337 →G33)=
338 →(S2T*(max(1.e-3,gam)/gam))/
339 →abs((1./G33)*(0.5*(C4513+c4523)+c4533));
340
341 DEQATN→20029→Sfxy(shr12,MOSxy0,MOSxy90,
342 →MSxy45x,MSxy45y)=
343 →max(1.e-10,abs(shr12))/min(MOSxy0,MOSxy90,MSxy45x,MSxy45y);
344
345 $Nebenbedingung fuer prozentuale Verteilung
346 DEQATN→299→summe(alp,bet,gam)=sum(alp,bet,gam);
347
348 DRESP2→555→summ→299
349 →DESVAR→11→12→13
350
351 DCONSTR→444→555→1.→1.
352
353 $Beziehung zwischen Model und Design Var.
354 DVPREL1,1,PSHELL,123,T,,,,,1,1.
355
356 $Design Einstellungen →,ID,Label,Typ
357 DRESP1,501,W,WEIGHT

```



```
358
359  $Spannung in Elementen
360  $→→→ID→Label→RType→PType→→→SID→→→PID
361  DRESP1→1→normX→STRESS→PSHELL→→→3→→→123
362  DRESP1→2→normY→STRESS→PSHELL→→→4→→→123
363  DRESP1→3→shr12→STRESS→PSHELL→→→5→→→123
364
365  $→→→ID→→→DRES→→→LB→UB
366  DCONSTR→30001→10009→→→1.
367  DCONSTR→30011→10019→→→1.
368  DCONSTR→30021→10029→→→1.
369
370  $Design Subcase →→,Sub-ID, ID
371  DCONADD→401→444→30001→30011→30021
372  $Parameter in Design Prozess einstellen→→→,Print-Control Stufe,
    max. Anzahl Zyklen 100
373  DOPTPRM, IPRINT, 0, DESMAX, 100, CONV, 1e-5, OPTCOD, IPOPT
374  ENDDATA 28ccf2fb
375
```

G. Elektronischer Anhang

```
.Elektronischer Anhang
├── Dokumentation
│   └── Latex Code
├── HyperSizer
│   ├── Datenbank
│   ├── Nastran Skripte
│   │   ├── Kastenprofil
│   │   └── Kragbalken
├── Nastran
│   ├── Kastenprofil
│   │   └── Variation
│   │       ├── 1
│   │       ├── 2
│   │       ├── 3
│   │       ├── 4
│   │       └── 5
│   └── Kragbalken
│       ├── Optimierung
│       │   ├── fx
│       │   ├── fx mx
│       │   ├── fz
│       │   └── mx
│       └── Variation
│           └── fx mx var
└── Python
```



Hier ist hoffentlich eine CD.

Abbildungsverzeichnis

2.1. Ansatzfunktionen eines Balkenelements der Länge L [10]	5
2.2. Entwicklung der Ansatzfunktionen bei Dreieck- und Viereckelementen [20]	5
2.3. Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen am ebenen Scheibenelement [10]	8
2.4. links: Skizze des Behälters, rechts: Abhängigkeit der Seitenlänge vom Volumen bei gegebener Behälteroberfläche [22]	10
2.5. links: 3D-Plot der Funktion (Gleichung 2.21), rechts: Höhenlinien der Funktion mit den einzelnen Schritten	14
2.6. links: Darstellung der Kriterien zur Suchrichtungsbestimmung [22], rechts: bestimmte Suchrichtung [22]	15
2.7. Vergleich der Versagenskriterien als Bruchfläche bei Belastung senkrecht zur Faserrichtung [9]	19
2.8. Definition des Koordinatensystems in der Laminat-Theorie, links: lokales KOS, rechts: globales KOS [12]	20
2.9. Skizze eines Mehrschichtverbunds zur Veranschaulichung von z_k [8]	23
3.1. Aufbau eines <i>CQUAD4</i> Elementes in NASTRAN [1]	28
4.1. Skizze des Balkens als Testproblem	33
4.2. FE-Modell des Balkens	34
4.3. Spannungsverlauf der x -Komponente am Balken unter Normalkraft F_x mit MSCADS-Optimierung	36
4.4. Graphische Darstellung der Optimierungsergebnisse am Balken unter Normalkraft F_x	36
4.5. Spannungsverlauf der xy -Komponente am Balken unter Schubmoment M_x mit MSCADS-Optimierung	37
4.6. Graphische Darstellung der Optimierungsergebnisse am Balken unter Schubmoment M_x	38

4.7. Spannungsverlauf der x -Komponente am Balken unter Querkraft F_z mit MSCADS-Optimierung	40
4.8. Graphische Darstellung der Optimierungsergebnisse am Balken unter Querkraft F_z	40
4.9. Spannungsverlauf der x -Komponente am Balken unter Normalkraft F_x und Schubmoment M_x mit MSCADS-Optimierung	42
4.10. Spannungsverlauf der xy -Komponente am Balken unter Normalkraft F_x und Schubmoment M_x mit MSCADS-Optimierung	42
4.11. Graphische Darstellung der Optimierungsergebnisse am Balken unter Normalkraft F_x und Torsionsmoment M_x	43
4.12. Graphische Darstellung der Optimierungsergebnisse mit Variation der Startwerte am Balken unter Normalkraft F_x und Torsionsmoment M_x .	45
4.13. Graphische Darstellung der Optimierungszeit zwischen IPOPT und MSCADS	48
6.1. Schematische Darstellung des Kastenprofils [1]	52
6.2. Kastenprofil in finiten Elementen	53
6.3. Spannungsverlauf der x -Komponente am Kastenprofil mit MSCADS-Optimierung	54
6.4. Spannungsverlauf der y -Komponente am Kastenprofil mit MSCADS-Optimierung	55
6.5. Spannungsverlauf der xy -Komponente am Kastenprofil mit MSCADS-Optimierung	55
6.6. Graphische Darstellung der Optimierungsergebnisse (Verteilung) mit Variation der Start-Dicken	57
6.7. Graphische Darstellung der Optimierungsergebnisse (Dicken) mit Variation der Start-Dicken	59
7.1. Graphische Darstellung der Optimierungsergebnisse mit HyperSizer am Balken, verglichen mit denen aus Kapitel 4	61
7.2. Spannungsverlauf der x -Komponente am Balken unter Querkraft F_z mit HyperSizer optimiert	62
7.3. Spannungsverlauf der xy -Komponente am Balken unter Torsionsmoment M_x mit HyperSizer optimiert	62

7.4. Graphische Darstellung der Optimierungsergebnisse mit HyperSizer am Kastenprofil, verglichen mit denen aus Kapitel 6	65
7.5. Spannungsverlauf der x -Komponente am Kastenprofil mit HyperSizer-Optimierung	65
7.6. Spannungsverlauf der y -Komponente am Kastenprofil mit HyperSizer-Optimierung	66
7.7. Spannungsverlauf der xy -Komponente am Kastenprofil mit HyperSizer-Optimierung	66
C.1. Stacking des unsymmetrischen Beispiels	71
C.2. Stacking des symmetrischen Beispiels	74

Tabellenverzeichnis

2.1. Lage und Wichtung der Gaußpunkte [20]	9
4.1. Optimierung am Balken unter F_x	35
4.2. Optimierung am Balken unter M_x	37
4.3. Optimierung am Balken unter F_z	39
4.4. Optimierung am Balken unter F_x und M_x	41
4.5. Gewählte Startparameter am Balken unter F_x und M_x	44
4.6. Optimierung am Balken unter F_x und M_x von verschiedenen Startpunkten	46
6.1. Werte zur Dimensionierung des Kastenprofils	52
6.2. Optimierung am Kastenprofil mit <i>MSCADS</i> -Optimierer	54
6.3. Gewählte Variation der Startparameter am Kastenprofil	56
6.4. Optimierung des Kastenprofils von verschiedenen Startpunkten (Iterationen, Gewicht)	57
6.5. Optimierung des Kastenprofils von verschiedenen Startpunkten (Dicken, Verteilungen)	58
7.1. Vergleich der Ergebnisse am Balken aus Kapitel 4 mit HyperSizer . . .	60
7.2. Vergleich der Ergebnisse am Kastenprofil aus Kapitel 6 mit HyperSizer	64
A.1. Im Rahmen der Arbeit verwendete Software	69
B.1. Material Eigenschaften für CFK [3]	70

Literaturverzeichnis

- [1] CHARUTO, M.: *Untersuchungen zur Strukturauslegung im Flugzeugentwurf*. Masterarbeit, Technische Hochschule Amberg-Weiden, 2014.
- [2] FUEHRER, T.: *Summary of several failure criteria*, 2010.
- [3] FUEHRER, T.: *Composite structures' stiffness degradation due to strength and stability*. Dissertation, Universität Braunschweig, 2013.
- [4] GROSS, D., W. HAUGER, J. SCHRÖDER und W. A. WALL: *Technische Mechanik 1: Statik*. Springer Verlag, 2009.
- [5] GROSS, D., W. HAUGER, J. SCHRÖDER und W. A. WALL: *Technische Mechanik 2: Elastostatik*. Springer Verlag, 2009.
- [6] HÄBERLE, J.: *Konstruieren mit Faserverbundwerkstoffen 1*, 2004.
- [7] HINTON, M., S. KADDOUR, P. SMITH, S. LI und P. SODEN: *Failure Criteria in Fibre Reinforced Polymer Composites: The World-Wide Failure Exercise*, 2011.
- [8] HORST, P.: *Ermittlung der elastischen Kennwerte von orthotropen Werkstoffen*, 2013.
- [9] HUBER, U.: *Faserverbund- und Sandwichtechnologie FUS*.
- [10] KLEIN, B.: *FEM - Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau*. Vieweg Verlag, 2007.
- [11] KLEIN, B.: *Leichtbau-Konstruktion - Berechnungsgrundlagen und Gestaltung*. Springer Vieweg, 2013.
- [12] LEDERMANN, C.: *Zusammenfassung der Laminattheorie*, 31.10.2005.
- [13] MEISTER, A.: *Numerik linearer Gleichungssysteme*. Vieweg+Teubner Verlag, 2011.

-
- [14] MSC SOFTWARE: *MSC Nastran 2012 - Getting started with MSC Nastran User's Guide*, 2012.
 - [15] MSC SOFTWARE: *MSC Nastran 2013 - Design Sensitivity and Optimization User's Guide*, 2013.
 - [16] MSC SOFTWARE: *MSC Nastran 2013 - Quick Reference Guide*, 2013.
 - [17] PAPAGEORGIOU, M., M. LEIBOLD und M. BUSS: *Optimierung - Statische, dynamische, stochastische Verfahren für die Anwendung*. Springer Verlag, 2012.
 - [18] PIEPKE, W.: *Numerische Mathematik*, 2013.
 - [19] PUCK, A.: *Festigkeitsanalyse von Faser-Matrix-Laminaten - Modelle für die Praxis*. Carl Hanser Verlag, 1996.
 - [20] RUST, W.: *Vorlesung Computergestützte Berechnung*, 2013.
 - [21] SCHADE, P.: *Innere-Punkte-Verfahren mit Redundanzerkennung für die Quadratische Optimierung*. Gabler Edition Wissenschaft, 2008.
 - [22] SCHUMACHER, A.: *Optimierung mechanischer Strukturen*. Springer Verlag, 2013.
 - [23] SCHÜRMANN, H.: *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*. Springer Verlag, 2005.
 - [24] SPINOFF, NASA: *Structural Analysis and Design Software*, 1997.
 - [25] THEIS, K. und W. RÄBIGER: *Optimierung von Mehrkörpersystemen*. Forschungsbericht, Technische Hochschule Nürnberg, 2009.
 - [26] WIEDEMANN, J.: *Leichtbau - Elemente und Konstruktion*. Springer Verlag, 2006.